啓林館 高校数学 教育情報誌

啓林館

フォーカスゴールド Focus Gold 通信

p.2-16 ［特集］

数学科における アクティブラーニングについて

名城大学　竹内英人

Focus Gold･Focus Σ 代表執筆者

授業実践記録 p.17-22

◆ 理数科課題研究「三角関数の加法定理を利用してピタゴラス数を求める」

～結果報告～

山口県立岩国高等学校　西元教善

vol.12

特集 数学科におけるアクティブラーニングについて
～石見智翠館高校でのアクティブラーニング型授業実践報告～

名城大学　竹内英人（Focus Gold·Focus Ƶ 代表執筆者）

近年，高校現場で「アクティブラーニング」という言葉がよく聞かれます。そこで，今回は「高校数学におけるアクティブラーニング」について考えてみたいと思います。その前に，現在の学校教育における課題についてまとめておきます。

【現状の課題】
・学校週5日制による授業数減
・新学習指導要領における内容の増加
・大学入試のレベルはそれほど大きな変化はない（むしろ難関大学では難化傾向）
↓
その結果として，
・いかに効率よく授業を進めるか？（教科書を終えるか。）
・いかに効率よく知識・技術の伝達を行うか？
・いかに大量のパターンを覚えこませるか？
↓
その結果として，
・あれほど大量に演習をこなしたにも関わらず，いっこうに力がつかない→より量を増やす
・大学合格後，きれいさっぱり忘れている（燃え尽き症候群）
・大学以降の学びにつながらない（世界で最も勉強しない大学生）→世界で戦えない

【問題意識】
① 我々は，単に，大学入試で合格点を取れる数学力をつけるだけでよいのか？
② 我々は，数学の指導（学校教育）を通して，彼ら（生徒）を主体的な学びへと誘っているのだろうか？
③ 我々は，彼らの「自分の力で突破していく力」をきちんと育成できているのか？（単に再現する力の育成に留まっていないか？）
→改めて「指導法そのものを見直す時期」に来ているのでは？

【問題提起】
上記の問題を解決していくためには，「我々はどのような数学の指導（授業）を行っていくべきか？」

その一番のヒントは**「主体的な学び」**というキーワードにあると思われる。

以上を踏まえ，再度学校教育について考えてみましょう。そもそも我々教師は学校で，生徒にどのような力を身につけさせたいのでしょうか？
以下は，私の私見です。
① 自力で突破する力
② 再現する力
③ 活用（応用）する力

中でも学校で一番身につけさせてあげたい力は，①の自力で突破する力だが，一番身につけさせられないのもこの力

数学の授業においても，3つの力は重要だと思いますが，ここでもやはり①の「自力で突破する力」を育成するのは一番重要であり，かつ一番難しいと考えています。

「自力で突破する力」を育成するために一番に必要なことは何でしょう？いくら教師が丁寧な授業をして，生徒から「先生の授業はわかりやすい」と言われても，それは，所詮，「他人に教えられて，その内容がわかった」というだけのことです。つまり，上記の力でいえば，②の再現する力が身についただけにすぎません。もっと言えば，②の力がつくならまだしも，ひょっとしたら単に「わかったつもり」になっているだけかもしれません。その結果，教師は「こんなに丁寧にたくさんの演習をしたにも関わらず，なぜできないのか？」といったジレンマに陥ります。そして，このジレンマは，我々教師自身が従来の授業観から180度意識を変えない限り，永遠に続くこととなります。

では，180度の方向転換とはどんな方法でしょうか？

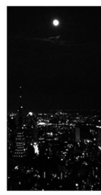
私自身は「教師主導型の授業」から「生徒主体の授業」こそ，「自力で突破する力」を育成する唯一の方法だと考えています。

話は少し飛びますが2020年の新大学入試より「思考力・判断力・表現力」が求められる問題が出題されることはご存知だと思います。先日，文部科学省が次のようなサンプル問題を発表しました。みなさんはどのような印象をもたれたでしょうか。私自身の率直な第一の感想は「今の授業のままではとても対応できない。」というものでした。それと同時に，「国が本気で日本の教育を変えようとしている」と感じました。つまり，今までの入試のためになかなか変えられなかった日本の教育を，敢えて入試の中身を変えることで，「授業改革」を通し，日本の教育を大きく変えようとしているのです。

問題イメージ＜例4＞

次の問いに答えよ。

伊藤さんは，「スーパームーン」に関する記事を読み，月が地球から最も離れたときに見える満月と比べて，記事にあるような「スーパームーン」はどのくらい大きく見えるのかを知りたくなり，月の見かけ上の大きさについて調べた。



夜空に浮かぶ大きな満月「スーパームーン」

月が地球に最も近づくタイミングと満月のタイミングが重なるため，月が通常より大きく見える。

（平成27年（2015年）9月28日　記事）

＜伊藤さんの調べたこと＞
○月の見かけ上の大きさは，見えている月を円と考えて，その直径の両端と視点とを結ぶ二等辺三角形の頂角である「視直径」で表す。

○「スーパームーン」の視直径はおよそ33分（ふん），月が地球から最も離れたときの満月の視直径はおよそ29分である。
ただし，1分は1°の$\frac{1}{60}$である。

（1）伊藤さんは，次の方法で満月を観測し，フィルムに円を描いて比べてみることにした。

＜伊藤さんの方法＞
視点から月の中心に向かって500mmの位置に，月の中心と視点を結ぶ直線に対して垂直になるように透明なフィルムを置く。そして，このフィルムを通して見える月をフィルムに写し取る。

伊藤さんの方法でフィルムに写し取られる，視直径θ分（ふん）の月の直径は何mmになるか。この直径を求める式を三角比を用いて答えなさい。

そこで，先生方もぜひ一度考えてみて下さい。「今の自分の授業で生徒がこの問題が解けるかどうか？」を。自信を持って「Yes」と答えられる先生は素晴らしいと思います。そうした先生方にとっては，「アクティブラーニング型授業」など恐れるに足らないものだと思います。なぜなら，上記のような問題を解決できる生徒は，まさしく「自ら考え，自力で解決しようとする生徒」に他ならないからです。つまり，「Yes」と答えた先生は，現時点で，十分に生徒主体の授業を実践されているということになるからです。

以下，こうした背景を元に，「数学科におけるアクティブラーニング」について考えてみたいと思います。

【アクティブラーニングの定義】
京都大学の溝上慎一教授は，「一方的な知識伝達型講義を聴くという（受動的）学習を乗り越える意味での，あらゆる能動的な学習のこと。能動的な学習には，書く・話す・発表するなどの活動への関与と，そこで生じる認知プロセスの外化を伴う」と，アクティブラーニングを定義しています。

【アクティブラーニング（AL）型授業の形式】
現在のAL型授業の主流は「グループ学習中心のAL型授業」であり，その形式は以下の通りです。

（以下は数学における例）
① 教師による講義（15分）
定義や定理の紹介，定理については証明。本日のテーマとなる（教科書，問題集の）基本例題の解説
ここでは，PC画面を活用し，生徒はノートを取らずに聴くだけ
② 作業（問題演習）
複数の応用問題が印刷されたプリントを配布し，まずは個人で取り組ませる。
③ グループ活動（協働学習）
各自で考えた問題について今度はグループ単位ごとにみんなで考える。わからない生徒は積

極的に質問し，できた生徒は，丁寧に教える。その間，教員は机間指導をしながら，（進め方に関する）簡単な指示，助言を行う。ただし，あくまでも支援の立場。

④　確認テスト

本日学んだ問題の類題のテストをする。（全員満点を目指す。わからなかったらプリントを見てもよい。）

⑤　ふり返り（5分）

その日の授業で学んだことや，よかった点，改善点などをふり返る。（ふり返りシートに記入）

この手法は確かに従来の教師主導型の授業に比べると，生徒が積極的に参加し，活気ある授業のようにも見えますが，その一方で様々な疑問が残ります。それを以下に挙げてみます。

【このグループ学習中心のアクティブラーニングを見て，疑問に思うこと】

①　何をもって，アクティブラーニングとしているのか？
- ➢生徒中心の授業だから
- ➢生徒が活発に話し合い活動をしているから
- ➢いままで授業に参加していなかった（参加できなかった）生徒が授業に参加するようになったから
- ➢（ほぼ）全員が（確認テストで）満点をとるから

②　何をもって，成果が上がっている（効果がある）と考えているのか？
- ➢居眠りをする生徒が減ったから
- ➢テストの平均点が上がったから
- ➢学力下位層のテストの成績（点数）が上がったから
- ➢生徒自身が数学力がついたと言っているから
- ➢生徒の数学への興味関心が高まったから

③　このスタイルの授業をする中で教師は何を考えているのか？（教師の想い，本音）
- ➢教師の一方通行的授業から生徒中心の主体的な授業になってよかった！
- ➢教師が説明をするよりも生徒同士話し合わせたほうが生徒も積極的になるぞ！
- ➢下位層の生徒（数学苦手な生徒）が参加するようになったぞ！
- ➢これで力がつくのだったら教師はいらない！（今までの自分が一生懸命教えてきた授業はなんだったのか？）
- ➢これで本当に上位層も伸びるのか？

④　教師はこの形式を用いることによってどのような力を生徒に身につけさせたいか？（どのような生徒を育成したいのか？）
- ➢数学が好きになってもらいたい（数学の面白さを伝えたい）
- ➢テストの点数がとれる数学力をつけたい（入試で合格できる数学力をつけたい）
- ➢数学を通して，課題（問題）に対して自分の力で解決できる思考力をつけたい
- ➢何事に対しても筋道をたてて考える力（論理的思考力）をつけたい

この「グループ学習中心のアクティブラーニング型授業」を見て感じることは，従来の教師主導の「講義型」の授業とのギャップが非常に大きいことです。とくに討論型の授業に慣れていない生徒にとっては非常に参加しにくい形式でもあるようです。実際，私もいくつかの「グループ学習中心のアクティブラーニング型授業を見てきましたが，結局のところ，よくできる生徒（数学が得意な生徒）が苦手な生徒に，解き方を伝え，それに習って当てはめて解決しているだけ（模倣しているだけ）で，結果的には全員が正解には至るが，決して各人の主体的な学びにはなっていないような気がしました。つまり，表面上の「協働学習（アクティブラーニング）」もどきを行っているだけであり，数学の学習において一番重要な要素である，「自身の頭で考える」という部分が決定的に欠如しており，その結果，「自ら突破する力」の育成には繋がっていないように感じています。

では，従来の教師主導型の形式を守りつつ，生徒の主体的な学びを育成する授業ができたらどうでしょうか。

従来の教師主導型の授業は主に以下のような授業形式でした。

（従来型の授業）

教師		生徒
（教科書・問題を使っての講義・板書）		（教科書を見ながら，聴講，板書を写す）
（問題の解き方を解説・指示）	⇨	（指示に従って，例題の解法を参考に問題を解く）
（生徒を指名しての発問…知識・技能中心）		（指示に従って答える）

知識・技能を獲得すればよいという生徒にとって，この一方通行的な講義形式は，ある意味都合がよい部分はありますが，生徒の思考力・主体性はなかなか育たないと思われます。

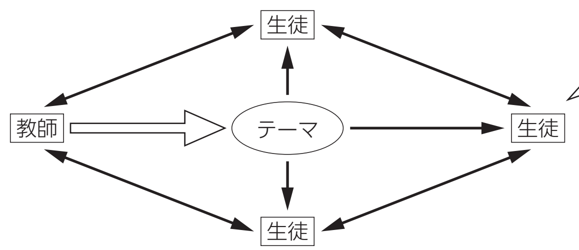
今回の文部科学省の答申でも，この点を強調しており，その打開策として「生徒が課題の発見・解決にむけて主体的・協働的に学ぶ学習」＝「アクティブラーニング」の導入を打ち出してきました。

一方，先に述べたように，現在高校で行われているアクティブラーニング型の授業は，「グループ学習」を中心にしたものがほとんどであり，この学習スタイルが果たして，文部科学省の掲げる「自ら解決する」という学習指導要領のねらいを達成できるものであるかという点で懸念を残します。

そこで，ここでは「グループ学習中心のアクティブラーニング型授業」とは異なる，これまでの教師主導の授業を発展させ，生徒達の主体的な思考をより求めていく授業形式として，「発問対話型のアクティブラーニング型授業」を考えてみたいと思います。

【生徒参加による発問・対話型授業】

教員がテーマを与え，生徒全員がそのテーマについて考え，様々な形で自分の意見を示す。
教員がその意見を上手く調整し，それを元にしてテーマを発展させ，その分野で学ばせたい数学内容の本質（数学的意義）に導く。
生徒が意志を表す方法としては，考えを持っているという意思表示，個人の発表，賛同・疑問等



教師が工夫したテーマを与え，生徒にじっくりと考えさせる。
生徒の発表や全体の意見を基に賛同や疑問を促し，全員の思考錯誤の上にテーマを発展させ，目的とする数学的理解に導く。

上記の授業を「発問・対話型 SG 授業（Student 生徒から Generate 生み出す授業）」と名づけます。

SG授業の詳しい構図は下の図の通りです。

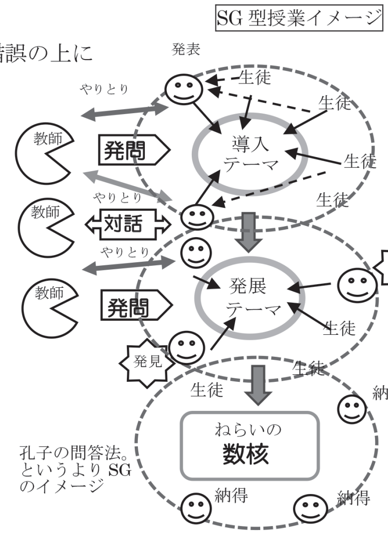
では，次の具体的な問題を用いた SG 授業の実践例を載せます。どの教科書にも載っている典型的な問題です。先生方もまずは自分だったらどのように指導するかをアクティブラーニング型の授業をイメージして指導プランを考えてみてください。
次ページでは，実際に右の問題で私が石見智翠館高校で行った授業の記録と，授業を受けた生徒の感想，参観してくださった先生の感想を載せます。

【問題】

> $\triangle$ABC の辺 AB を 3：2 に内分する点を M，辺 AC を 2：1 に内分する点を N，CM と BN の交点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ。

〈SG 授業の構図〉

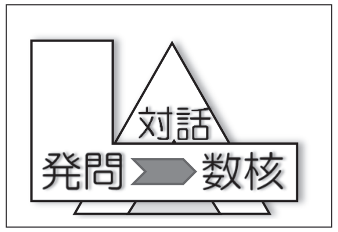
教師が工夫したテーマを与え（発問)、生徒全員に考えさせる。
生徒の発表や、全体の意見を基に賛同や疑問を促し、生徒の試行錯誤の上にテーマを発展させ、生徒を発見や目的とする数学的理解に導く。



指導の要点

★ ねらいの「数核」と発問の工夫
・各分野・項目でねらいとする数学のエッセンス。**「数核」**。
・自然な発見・納得に繋がる導入テーマ(**発問**)の工夫。
★生徒が意思を示す方法
・挙手等考えがあるいう意思表示
（全員を立たせてわかった者は座る。）
・個人の発表　・全員の意見（A に賛成　B に賛成）等
★教科書を使用せず、工夫した自作授業プリントを活用。
・マスターすべきポイントと精選した問題で構成
★ 授業の組み立て　考査までの授業計画
・教科書に沿った授業と同様の進度で分野をこなせるよう計画
★ 板書を写す作業はさせず、受講ポイントを項目だけ記録させ、その内容をまとめることで復習とさせる。

発問しながら生徒を徐々に納得に導く授業形式は目新しいものでなく、一部的にはどの教師も実施しているだろうし、個人教授ではよくある手法である。
これを 40 人相手に取り組もうというわけである。
研究と工夫、授業展開のスキルアップが必要である。
授業力アップを目指そう！



アクティブラーニング＝脳をアクティブに！

【授業実践記録】

（以下，教師は T，生徒は S で表します。）

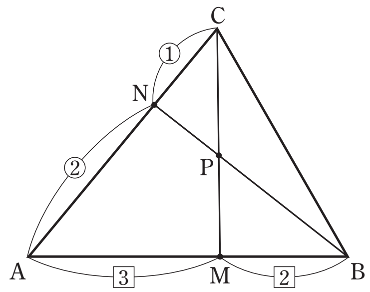
T：今日はベクトルの問題をやります。授業に当たって一つだけ約束事をします。今日の授業ではたくさん皆さんに当てますがそのときは，適当に答えるのではなく，自分が本当に正しいと思ったことだけを言ってください。正解か不正解かは問題ではありませんのでよく考えてから答えてください。早速，次の問題をやってみてください。まずは各自で 5 分考えてみましょう。どうぞ。
（p.6 の問題を提示する）

～5 分経過～

T：はい，では時間になったから一緒に考えていきます。まず，図はかけましたか？どう S1 さん？

S1：はい，かけました。

T：じゃあ，先生も前にかいてみますね。だいたいこんな感じでしょうか。では，この問題は何を求めればよかったでしょうか？



S2：$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せばいいです。

T：$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表すとはどういうことですか？

S2：$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を（何とか倍の $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$）+（何とか倍の $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$）で表します。

T：数式で表現できませんか？

S3：$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の形に表せます。

T：α と β は何ですか？

S3：実数です。

T：なるほど。では，どうして $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ はそのような式で表現できるのでしょうか？

S4：……
（他の生徒からも手があがらない）

T：では，周囲の人と相談してみましょう。

～2 分経過～

T：どうですか？はい，S5 さん。

S5：$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は平行ではないから，2 つを使って表せます。

T：今の説明でわかりましたか？

（数名，手をあげる）

T：まだわからない人がいるみたいですね。誰か他に説明できる人はいますか？

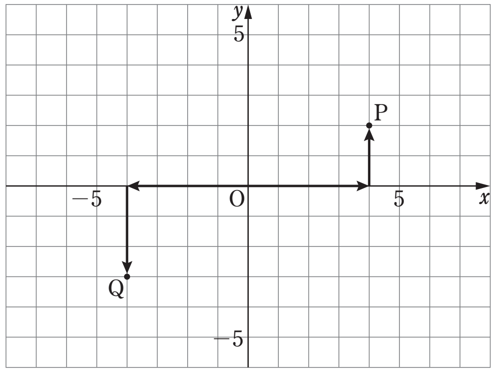
S6：平行でない 2 つのベクトルがあれば，その 2 つを使って，残りのベクトルはすべて表されます。

T：なるほど。今の意見で納得した人は？

（手をあげる人数が増える）

T：思い出してきたみたいですね。では少し復習しましょう。S7 さんは UFO キャッチャーをやったことはありますか？

S7：あります。
（以下の図を黒板に投影する）



T：では，今から UFO キャッチャーで説明しましょう。普通，UFO キャッチャーは左右，上下の動きができるレバーがありますね。この 2 つの動きは座標でいうと，x 軸方向の動きと y 軸方向の動きですね。今，点 O を出発して，点 P にあるお菓子をとるためにはどうすればいいでしょう？

S7：右に 4，上に 2 です。

T：右に 4，上に 2 は，何を基準で右や上と言っているのですか？

S7：(1，0) と (0，1) というベクトルです。

T：そうですね。座標というのは，2 つの垂直な単位ベクトルを基準にそれぞれ左右にいくつ分，上下にいくつ分進んだかによって，位置が 1 つに決まりました。Q にあるお菓子だったら，左に 4，下に 3 ですね。座標でいうと，(−4，−3) です。これは誰がやっても同じですね。では，今の UFO キャッチャーを踏まえて，さっきの問題と答えをもう一度，周りと話し合ってみましょう。

～1 分程度～
T：では，説明できる人？

S8：$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を UFO キャッチャーのレバーの動ける方向だと考えれば，点 P にたどり着けます。

T：今の S8 さんの説明でわかりましたか？

（半分くらいの生徒が手を挙げる）

T：まだ少しわからない人がいるみたいだから，誰かもう一度説明してみてください。

S9：さっきの図で A をスタート地点として UFO キャッチャーが，$\overrightarrow{AB}$ 方向と $\overrightarrow{AC}$ 方向に動けるとき，点 P は必ず 2 つの動きを組み合わせてたどり着くことができるから，$\overrightarrow{AP}$ は $\overrightarrow{AB}$ の何倍かと $\overrightarrow{AC}$ の何倍かの組み合わせで表すことができます。

T：なるほど。斜めの動きができる UFO キャッチャーを考えたわけですね。$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ は先ほどの座標における (1，0) と (0，1) の代わりをしたということですね。みなさんイメージできましたか？それでは，一度，実験をやってみましょう。さっきの図で先生が点 P にあるお菓子を取りますから，誰かどう動いたらいいか言ってみてください。

S10：まず右に動いてください。

T：適当なところでストップって言ってくださいね。（といいながら，$\overrightarrow{AB}$ の正方向（右方向）に指を沿って動かしていく）

S10：ストップ。

T：はい。続けてください。

S10：今度は上に動いてください。

T：（$\overrightarrow{AC}$ の正方向（右斜め上）に沿って動く）

S10：ストップ。

T：確かに 2 つのベクトルの動きで点 P にたどり着きました。UFO キャッチャー成功ですね。他の人はどうでしたか？S10 さんと違う動きをして点 P にたどり着いた人はいますか？

（誰も手をあげない）

T：本当に？では，今度は全員でやってみましょう。自分のストップのタイミングで挙手してみてください。（同じように生徒の前で指を動かして実演する）

T：確かにみんな同じタイミングで手をあげてくれましたね。ということは，点 P にあるお菓子は誰がやっても $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を使えば，同じ移動のしかたになるのですね。つまり，これを数学的に表現すれば，平面上の任意の点 P に対し，$\overrightarrow{AP}$ は $\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ と表すことができ，実数 α，β は 1 つに決まるといいます。P はお菓子の位置で，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ はレバーの 2 方向の基準，α，β はそれぞれの方向に何倍進むかとう倍率ですね。ここで確認です。今，2 方向の基準となる 2 つのベクトル $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ にはある条件が必要ですが，わかる人いますか？

S11：平行でない。

T：それだけですか？

S11：零ベクトルでない。

T：そうです。よく覚えていましたね。では，なぜ平行でなくて零ベクトルでないのですか？

S11：2 つのベクトルが平行だと同じ方向にしか動けないし，1 つが零ベクトルの場合も同じだからです。

T：そうですね。今，ともに始点 A だから 2 つのベクトルが平行だったら，A を通る同一直線上にしか動けないですからね。その直線上にない点 P はたどり着けない。零ベクトルに関してもその通りです。この互いに平行ではなく，零ベクトルでない $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を「1 次独立なベクトル」といって，$\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ の形の式を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の「1 次結合」といいましたね。これで，$\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ で表すという意味が確認できましたね。では，その続きを考えてみましょう。

S12：NP：PB$=s:(1-s)$ とおきます。

T：なぜいきなり比の式が出てくるのですか？

S12：P は NB の内分点だからです。

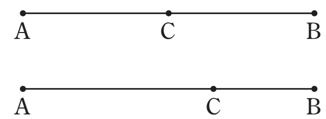
T：なるほど。では，s って何ですか？

S12：実数です。

T：なぜ，そんな風におけるのですか？

S12：……

T：今まで辺の比を表すときにどのように表しましたか？たとえば，このような図だったらどうでしょう。（といって，2 つの線分 AB 上に内分点 C がある図を黒板にかく。）たとえば，こちらの例だと，AC：CB は何対何ですか？大体でも構いません。



S13：1：1 です。

T：そうですね。ではこちらは？

S13：2：1 です。

T：大体そうですね。では，今 2 つの例で AC：CB を表したとき，どのように表しましたか？

S13：整数で表しました。

T：そうですね。では，先ほどの $s:(1-s)$ と表現するには s にどのような値を入れればいいですか？

S13：……

T：よく考えてみましょう。s にどのような値を代入すれば $1:1$ が作れるかということですよ。整数とは限りません。

S13：$s=\dfrac{1}{2}$ です。

T：そうですね。$s=\dfrac{1}{2}$ とすれば，

$s:(1-s)=\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{2}=1:1$ となりますね。では，２つ目の例なら s にどのような値を代入すればいいですか？

S14：$\dfrac{2}{3}$ です。

T：その通りです。$s:(1-s)=\dfrac{2}{3}:\dfrac{1}{3}=2:1$ となりますね。つまり，どのような整数比でも線分全体の長さを１と考えたときの割合として考えれば，必ず $s:(1-s)$ という形で表現できます。意味もわからずに，なんとなく $s:(1-s)$ と置いていた人もいたのではないでしょうか。意味がわからずにやってはいけません。１つずつ，**「なぜこれは成り立つのかな？」**と考えながら進めてください。では，その続きを言える人いますか？

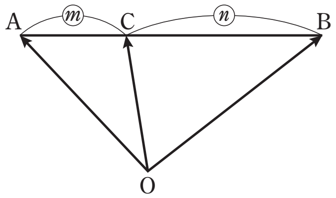
S15：$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+(1-s)\overrightarrow{AN}$ です。

T：その式はどこから出てきましたか？

S15：内分の公式です。

T：どのような公式でしたか？

S15：線分 AB を $m:n$ に内分する点を C とするとき，$\overrightarrow{OC}=\dfrac{n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+n}$ です。



T：なぜこの式が $\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+(1-s)\overrightarrow{AN}$ となるのですか？

S15：それは，$m:n=s:(1-s)$ と考えると，

$\overrightarrow{OC}=\dfrac{(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}}{s+(1-s)}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}$

と表されるからです。

T：なるほど今この問題では，$NP:PB=s:(1-s)$ と置いたから，

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{s\overrightarrow{AB}+(1-s)\overrightarrow{AN}}{s+(1-s)}=s\overrightarrow{AB}+(1-s)\overrightarrow{AN}$

と置けるのですね。似た考えですが，

$\overrightarrow{OC}=\dfrac{n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+n}=\dfrac{n\overrightarrow{OA}}{m+n}+\dfrac{m\overrightarrow{OB}}{m+n}$

と変形して，$\dfrac{n}{m+n}=1-s$，$\dfrac{m}{m+n}=s$ と置いてもいいですね。では，内分の公式を知らなかったらどうしますか？

(生徒から意見は出ない)

T：ベクトルのよいところは回り道をしても，始点と終点が同じであればよかったのでしたね。今，$\overrightarrow{AP}$ で直接 A から P に行くのではなく，回り道して考えたらどうなりますか？

S16：A から N を通って P へ行きます。

T：式で表すと？

S16：$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NP}$ です。

T：この式を使うとどうなりますか？

(意見が出ない)

T：では，周囲と少し相談してみましょう。

～1分経過～

T：では，わかった人は？難しいでしょうか。今，$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+(1-s)\overrightarrow{AN}$ の形で表したいのです。$\overrightarrow{AN}$ はすでに登場しているから，あとは $\overrightarrow{AB}$ がほしいですね。でも実際には $\overrightarrow{NP}$ しかでてきませんね。ここで $\overrightarrow{NP}$ と点 B の関係はどうなっていますか？

S17：$\overrightarrow{NP}$ の延長線上に B があります。

T：そうですね。N，P，B は同一直線上ですね。これをベクトルの式で表すとどうなりますか？

S17：$\overrightarrow{NP}=s\overrightarrow{NB}$ です。

T：そうですね。同一直線上表示は実数倍でしたね。その式を代入すると，

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AN}+s\overrightarrow{NB}$ と表されます。

それから？

S18：始点を A にします。

T：やってみましょう。

S18：$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AN}+s(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AN})=s\overrightarrow{AB}+(1-s)\overrightarrow{AN}$

T：さっきの式が導けましたね。このように内分の公式を知らなくてもできましたね。では次に何をしらたいいでしょうか。

S19：上の式で，$\overrightarrow{AN}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ に直して，

$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+\dfrac{2(1-s)}{3}\overrightarrow{AC}$ と変形します。

T：なぜ，$\overrightarrow{AN}$ を $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ に直さなくてはいけないのでしょう。

S19：$\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ で表さないといけないからです。

T：そうでしたね。そこからスタートしたんでした。ということは，$\overrightarrow{AP}$ が $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の１次結合で書けたから答えはこれでいいですか？

S20：ダメです。s の値がわかりません。

T：では，どうすればいいですか？

S20：「$CP:PM=t:(1-t)$」とおきます。

T：それは何の式ですか？

S20：点 P が線分 CM を内分する式です。

T：なぜ，点 P を線分 CM の内分点と考える必要がありますか？点 P は線分 BN を内分する点だけではダメですか？

S21：P は線分 BN と線分 CM の交点だからです。

T：そうですね。他のみんなもいいですか。線分 BN の内分点だけだと P は１つに決まらないので，点 P を線分 BN の内分点と線分 CM の内分点，すなわち点 P を２つの線分の交点と見ることによって１つの点に決まるということですね。ここからはさっきと同じ手順です。$CP:PM=t:(1-t)$ だから，

$\overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{AC}+t\overrightarrow{AM}$ と表せますね。そのあとはどうですか？

S22：$\overrightarrow{AM}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ だから，

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{3t}{5}\overrightarrow{AB}+(1-t)\overrightarrow{AC}$ と表せます。

T：そうですね。よって，点 P を線分 BN，線分 CM のそれぞれの内分点とみることによって $\overrightarrow{AP}$ は２通りの表現で表せました。

$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+\dfrac{2(1-s)}{3}\overrightarrow{AC}$ ……①

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{3t}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad \cdots\cdots②$$

ここからどうしますか？

S23：$s=\dfrac{3t}{5}$，$\dfrac{2(1-s)}{3}=1-t$

T：その式は何の式？

S23：$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の係数を比較した式です。

T：なぜ①と②で $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の係数と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の係数が等しくなるのですか？

S23：同じベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ だからです。

T：もう少し正確にいうとどうなりますか？ UFOキャッチャーを思い出しましょう。

S24：$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ はお互いに零ベクトルではなく平行ではないから，2つのベクトルを使って必ず1通りに表現できます。

T：そうですね。すばらしい。だから係数が比較できるのでしたね。なんとなく係数を比較していた人は,この部分をしっかり理解しましょう。そのために，最初にUFOキャッチャーの話をしたのです。

よって，2式を計算すると，$s=\dfrac{1}{3}$，$t=\dfrac{5}{9}$

したがって，①に $s=\dfrac{1}{3}$ を代入して，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となります。これでできましたね。

この問題は平面ベクトルの中でも基本的な問題だと思いますが，実はベクトルの大事な要素が詰まった非常に大切な問題です。解き方のパターンを覚えるだけでしたらすぐに答えにたどり着くかもしれませんが，1つ1つの知識を「なぜそうなるか？」と考えていくと実に多くの基本事項が含まれていることがわかります。この1つ1つの基本事項をごまかさずに意味を理解し表現することが，難しい問題を解くときの土台となります。逆にいえば，こうした基本的な問題を何も考えずに意味もわからないまま，ただ解き方だけを暗記するような学習をしてきた人は，いくらたくさんの問題を解いても数学はできるようになりません。そういった意味で基礎の大事さを実感できる問題だと思います。もう一度，今学んだ思考過程を自分で再現して答案として書けるようにくり返し復習してください。ということで，今日の授業を終わります。

【授業を受けた生徒の感想】

（生徒1）

竹内先生，先日は遠いところからわざわざ来て下さってありがとうございました。今回の先生の授業は，はっとさせられる目からウロコな内容ばかりで，本当に勉強になりました。特に印象に残っているのは，授業の最初に言われたルールの「自分が正しいと思ったことしか言わない」という言葉です。それを聞いた時には，そんなのあたり前だと軽く思っていましたが，授業中に先生が「お前はそれが本当に正しいと思うのか。」と言われた時に，自分にはまだまだそれが出来ていなかったことに気が付きました。問題をなんとなく，授業で教えてもらった方法で解いていたからです。全然自分で考えていなかったのだと愕然としました。私は日常生活の中での会話や過ごし方でも，なんとなく流れにあわせることが多かったので，先生に言われたように自分で正しいと思ったことを行動に移してみたら，少しの達成感があり，ものすごく自分のためになる生活が送れたように感じました。これを継続していきたいです。また，基本の後の標準問題を解いているとき，解き方は結構たくさんあって，基礎の考え方がしっかりしていればちゃんと答えまで行けるということが分かり，基本の大切さを思い知りました。先生に「どうしてそうなるの，そう解くの」と聞かれたときに自分は上手く答えられなかったので，基本がまだまだです。今後の授業では基本をおさえられるよう脳内竹内先生と一緒に「どうしてそう解くの」と思いながら受けようと思います。数学は，頑張って答えが出ると嬉しいので，"正しいことをすれば正しいことに至る"，を意識して，自分で考え抜いて頑張ろうと思います。本当にありがとうございました。Focus Gold も何周もしたいと思います。送って下さった整数のプリントも，すごく有難かったです。最後になりますが，先生の授業本当に勉強になりました。もし，また受けさせていただいたらとても嬉しいです。また，ぜひいらして下さい！

（生徒2）

竹内先生の授業はとても新鮮でした。教えてもらったものは解き方ではなく，問題の考え方でした。僕は今まで，暗記して解くということが多く，今回の授業では答えられない問いがとても多かったです。解くことはできるが，何故そうなるのかをしっかり理解できていないことを気付かせてもらいました。解くことができるのは見たことがある問題だからであり，初見の問題は解けないということがよく分かりました。初見の問題でも解けるようになるためには基礎の理解が大事で，基礎がしっかり分かっていれば，どんな問題でも解けるようになると思いました。また，今までは問題が解けないとすぐに答えを見てしまっていましたが，最低50分は考えろと言われたので，やはり答えを覚えるのではなく，しっかり考えることが大事だと思いました。

お話の中に，Focus Goldの例題の番号で問題を言える人や，Focus Goldを普通に4周，5周している人がいると聞き，まだ自分はそこまでやり込んでいないので，その人達と戦うことを考えたら今のままじゃ勝てないと思いました。またその人達が，しっかり考えてやっていたら絶対に勝てないと気付くことができ，モチベーションが上がりました。

竹内先生は授業のルールとして自分が正しいと思ったことだけ言うこと，と言われました。正解不正解はあとで確かめればいいから，まず自分の考えを持つことがとても大事だと思いました。自分で考えないまま解いていてもあまり意味がないと分かり，自分の学習を見直し，改善するきっかけとなりました。また，この自分の考えを持つということは勉強だけではなく，人とのコミュニケーションでも大事だと思いました。数学の授業を通して自分の考えを持つことの大切さが分かり，とても感謝しています。また授業もとても楽しく普段の何倍も考えることができました。この深く考えることを色々なものに対してやってみたいです。わざわざ遠くから来ていただき有りがとうございました。

（生徒3）

今日はお忙しい中，このような特別授業をしていただき，ありがとうございました。今日の授業を受けて，改めて数学との向きあい方について色々なことを考えさせられました。

私は正直，数Ⅱ，数Bに入ってから内容に追いつくのに必死で公式を覚えたり，解き方を覚えるだけで，「何故そのやり方でできるのか」とか，「どうしてこの公式が成り立つのか」など，本質的なところを考えることを怠っていました。このような今の私の数学の状況の中で，今日の竹内先生の授業はとても衝撃的でした。「自分が本当に正しいと思ったことしか言ってはいけない」というのは簡単なことに思えても，実は意外に難しいことでした。自信を持って「正しい」と言うには，そのことを他の人に説明できるくらいでないといけないのだと気付かされました。「基本」が大事とはよく言うけれど，本当の基本というものが全然身についていなかったということを強く実感させられました。

これから，さらに数学を学んでいくにあたって，今日教えていただいたことを少しずつでも自分に取り入れていきたいと思います。考えることがいっぱいあって大変でしたが，今日の授業は本当に楽しかったです。「本当の基本」を身に付けられるように頑張りたいと思います。今日はこのような遠いところまで本当にありがとうございました。

（生徒4）

今日は，わざわざ名古屋から来てくださってありがとうございました。

私は予定があり，午後からの参加でしたが，考えること，解くことのおもしろさというものを感じました。

私は数学が苦手で，少し難しい問題になると，いつもどこから解いていけばいいのかをあまりよく考えられずになんとなくでやっていたところがありました。でも，今回の授業では基本の問題から，どう考えているかを詳しく解説していただき，その後に基本の問題を使って解く問題へ，という流れでやらせていただいたので，まったく手をつけられない，というようなことにはならず，さっきやったことを使えばいいんだ，ということが分かり，解くのがおもしろく感じました。また，5の問題で，支点をA以外も全てやってみるのもおもしろかったです。いつも支点はA以外考えたことがなくて，Aでするものだと思っていました。でも，A以外でやってみると，そっちの方が実は簡単だったりしたので，なんでもかんでも決めつけてしまうのは数学としておもしろくないと思いました。今までは，解けたらそれで満足していましたが，もう少し解いていく中で疑問を見つけて考えることをしてみようかな，と思います。

数学は，自分の力で解けたと感じる時，うれしいし，楽しいです。これからも，よりそう思えるように数学をやっていきたいと思います。今日は貴重なお時間をありがとうございました。

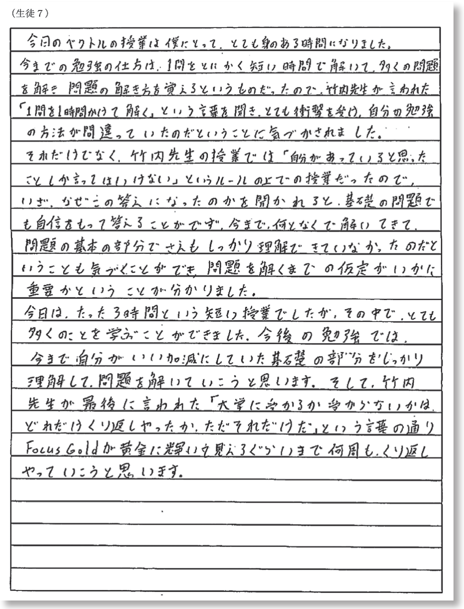
（生徒5）

本日はお忙しい中，遠方よりおこしいただきありがとうございました。今日の授業のタイトルである「ベクトル～基礎から標準へ～」を知り，どのような授業を受けられるのかとワクワクした気持ちで授業を受けました。すると，解法を知っているために問題は解けても，なぜその解き方で解けるのか，その公式や解法にどのような意味があるのかを言葉で表現することが出来ない自分に気が付きました。今までの私はそのようなことを考えて勉強することが出来ておらず，「このタイプの問題なら，この解き方だ」というように問題をパターン化し表面的にしか捉えていませんでした。ですが，今日の授業を受けて問題の本質を捉えることがいかに大切かということが分かりました。特に四の問題は今までの自分の勉強の雑さが分かった問題でした。よく分からずに書いていた"一次独立"，この意味が分かったことは大きな収穫となりました。竹内先生がおしゃっておられた「基本がすべてで，基本を押えていないと勉強をいくらしても伸びなくなる」という言葉，まさに今の自分にあてはまるように思います。今までの自分の問題の解き方だと新しいタイプが現れるたびに，個別具体的な解法を身につけなければなりませんでした。これからは，その分野ごとでの基本となる考え方をしっかりと押え，本当の意味での基本を捉えた上でフォーカス・ゴールドを使って練習をしていこうと思います。そうすることで，普遍的で汎用性のある数学力をつけていけると思います。今日学んだ「本当の基本」の大切さ，また，授業中での自分がそうだと思ったことだけを自信を持って発言することの大切さこの2点に関して，今後の学習の際に意識して学んだり，発言していこうと思います。今日はすばらしい授業をして下さりありがとうございました。

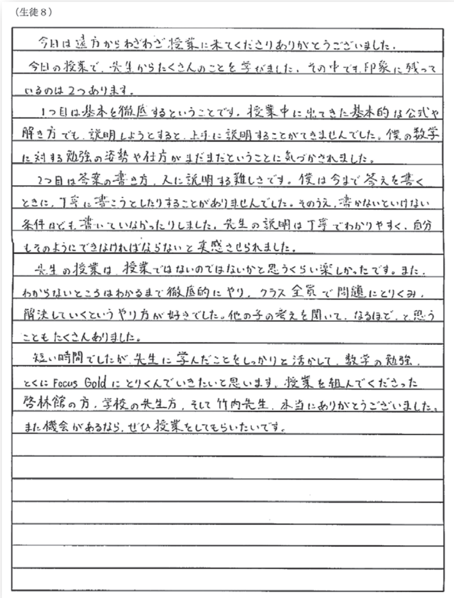
（生徒6）

先日は遠い所から硯智翠館高校にお越しいただきありがとうございました。私達が普段使わせていただいているFocus Goldを製作された方の授業を受けることができると聞き，とても楽しみにしていました。どんどん竹内先生の授業に引き込まれていき，授業がとてもあっという間に感じました。今回の授業から学んだことは2つあります。1つ目は「基礎中の基礎を甘く見ず，しっかり理解する」ということです。自分は数学が好きで得意な方なので，基本公式や解法などのある程度の基礎は入っていると思っていました。ですが授業内で「この公式はどうして使えるのか」，「なんでこの解法を使うのか」と聞かれた時に，答えられない自分がいました。普段の勉強の足りない部分が分かったと共に説明を受けてそうなんだと納得することができました。2つ目は「相手に分かりやすいように詳しく説明する」ということです。私達が目指す大学は特に厳しく，ほんの数点差を争っていく世界です。一言説明が足りなかったせいでその大事な数点が失われてしまうのだと考えると，普段からそういった細い部分も意識していかなければならないなと改めて気が付きました。

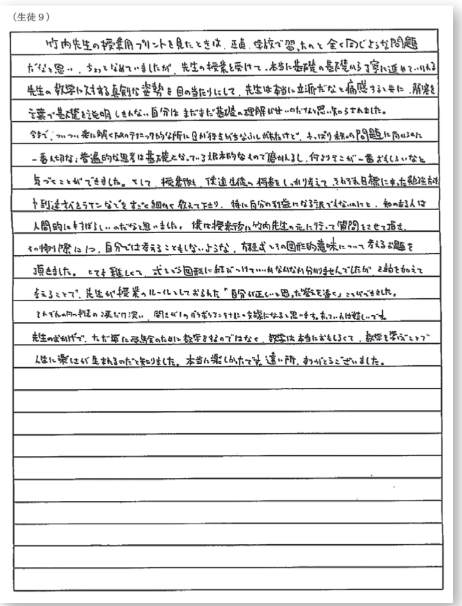
授業の始めの頃は少し緊張していた私でしたが，明るい雰囲気の中でたくさんのことを吸収でき，最終的にはもっと授業を受けたいと思うまでになりました。こういった貴重な機会を与えて下さった細木先生を中心とする先生方，そしてそれを快く引き受けて私達に特別授業をして下さった竹内先生には本当に感謝しています。竹内先生に教えていただいたことを大事にしていきたいですし，この経験を数学だけでなく他の教科にも役立てていけるよう頑張っていきたいと思います。またお会いできる日を楽しみにしています。本当にありがとうございました。


(生徒７)

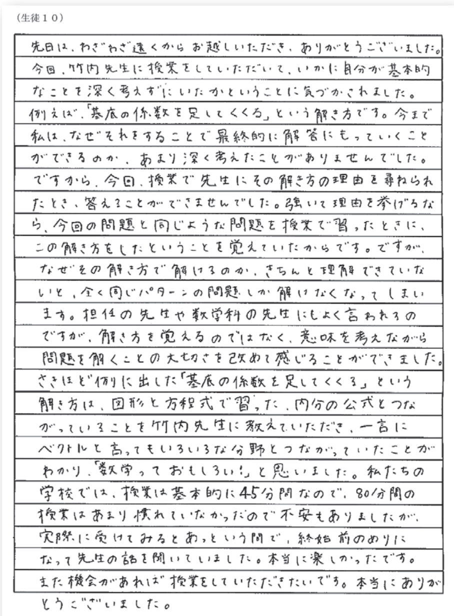
今日のベクトルの授業は僕にとって，とても身のある時間になりました。
今までの勉強の仕方は，1問をとにかく短い時間で解いて，多くの問題を解き問題の解き方を覚えるというものだったので，竹内先生が言われた「1問を1時間かけて解く」という言葉を聞き，とても衝撃を受け，自分の勉強の方法が間違っていたのだということに気づかされました。
それだけでなく，竹内先生の授業では「自分があっていると思ったことしか言ってはいけない」というルールの上での授業だったので，いざ，なぜこの答えになったのかを聞かれると，基礎の問題でも自信をもって答えることができず，今まで，何となくで解いてきて，問題の基本の部分でさえもしっかり理解できていなかったのだということも気づくことができ，問題を解くまでの仮定がいかに重要かということが分かりました。
今日は，たった3時間という短い授業でしたが，その中で，とても多くのことを学ぶことができました。今後の勉強では，今まで自分がいい加減にしていた基礎の部分をじっかり理解して，問題を解いていこうと思います。そして，竹内先生が最後に言われた「大学に受かるか受からないかは，どれだけくり返しやったか，ただそれだけだ」という言葉の通りFocus Goldが黄金に輝いて見えるぐらいまで何周も，くり返しやっていこうと思います。


(生徒８)

今日は遠方からわざわざ授業に来てくださりありがとうございました。
今日の授業で，先生からたくさんのことを学びました。その中でも印象に残っているのは2つあります。
1つ目は基本を徹底するということです。授業中に出てきた基本的な公式や解き方でも，説明しようとすると，上手に説明することができませんでした。僕の数学に対する勉強の姿勢や仕方がまだまだということに気づかされました。
2つ目は答案の書き方，人に説明する難しさです。僕は今まで答えを書くときに，丁寧に書こうとしたりすることがありませんでした。そのうえ，書かないといけない条件なども書いていなかったりしました。先生の説明は丁寧でわかりやすく，自分もそのようにできなければならないと実感させられました。
先生の授業は，授業ではないのではないかと思うくらい楽しかったです。また，わからないところはわかるまで徹底的にやり，クラス全員で問題にとりくみ，解決していくというやり方が好きでした。他の子の考えを聞いて，なるほど，と思うこともたくさんありました。
短い時間でしたが，先生に学んだことをしっかりと活かして，数学の勉強，とくにFocus Goldにとりくんでいきたいと思います。授業を組んでくださった啓林館の方，学校の先生方，そして竹内先生，本当にありがとうございました。
また機会があるなら，ぜひ授業をしてもらいたいです。


(生徒９)

竹内先生の授業用プリントを見たときは，正直，学校で習ったのと全く同じような問題だなと思い，ちょっとなめていましたが，先生の授業を受けて，本当に基礎の基礎から丁寧に進めていける先生の数学に対する真剣な姿勢を目の当たりにして，先生は本当に立派だなと痛感すると共に，簡潔な言葉で基礎を説明しきれない自分はまだまだ基礎の理解が甘いのだなと思い知らされました。
今まで，ついつい楽に解くためのテクニック的な所に目が行きがちなふしがあったけど，やっぱり数学の問題に向かうのに一番大切な，普遍的な思考は基礎となっている根本的なもので磨かれるし，何よりそこが一番おもしろいなと気づくことができました。そして，授業後も，僕達生徒の将来をしっかり考えて，それぞれ目標にあった勉強方法や到達すべきラインなどをすごく細かく教えて下さり，特に自分の利益になる訳でもないのにこと，知のある人は人間的にもすばらしいのだなと思いました。僕は授業後に竹内先生の元に行って質問をさせて頂き，その帰り際に1つ，自分では考えることもしないような，方程式とその図形的意味について考えるお題を頂きました。とても難しくて，式とどう図形に結びつけていいかなかなか分かりませんでしたが，z軸を加えて考えることで，先生が授業のルールとしておられた「自分が正しいと思った答えを導く」ことができました。
それぞれの内の数学の深さだけ深い，問題が1つのバラバラなテーマたちへの支線になると思います。あっているかは怪しいです。
先生のおかげで，ただ単に受験のために数学をするのではなく，数学は本当におもしろくて，数学を学ぶことで人生に楽しさが生まれるのだと知りました。本当に楽しかったです。遠い所，ありがとうございました。


(生徒１０)

先日は，わざわざ遠くからお越しいただき，ありがとうございました。
今回，竹内先生に授業をしていただいて，いかに自分が基本的なことを深く考えずにいたかということに気づかされました。
例えば，「基底の係数を足してくくる」という解き方です。今まで私は，なぜそれをすることで最終的に解答にもっていくことができるのか，あまり深く考えたことがありませんでした。
ですから，今回，授業で先生にその解き方の理由を尋ねられたとき，答えることができませんでした。強いて理由を挙げるなら，今回の問題と同じような問題を授業で習ったときに，この解き方をしたということを覚えていたからです。ですが，なぜその解き方で解けるのか，きちんと理解できていないと，全く同じパターンの問題しか解けなくなってしまいます。担任の先生や数学科の先生にもよく言われるのですが，解き方を覚えるのではなく，意味を考えながら問題を解くことの大切さを改めて感じることができました。
さきほど例に出した「基底の係数を足してくくる」という解き方は，図形と方程式で習った，内分の公式とつながっていることを竹内先生に教えていただき，一言にベクトルと言ってもいろいろな分野とつながっていたことがわかり，「数学っておもしろい！」と思いました。私たちの学校では，授業は基本的に45分間なので，80分間の授業はあまり慣れていなかったので不安もありましたが，実際に受けてみるとあっという間で，終始前のめりになって先生の話を聞いていました。本当に楽しかったです。
また機会があれば授業をしていただきたいです。本当にありがとうございました。

【参観していただいた教師の感想】
「竹内先生の授業を参観して」

対話中心の展開で，生徒の頭が動いている，動き続けているなというのが一番の印象でした。今よく耳にするアクティブラーニングは，ペアワークやグループワーク学習ありきのような形式（それも1つのいい形式なのでしょうが）だけが走っているように感じていました。教師対全生徒の今回の授業でも，全生徒が常に考え，先生や発言する生徒に注目しており，まさにアクティブラーニングが起きている状態でした。これもまた効果のあるアクティブラーニング型授業の1つだと感じ，自分の授業にも取り入れながら研究していきたいと思います。なぜこの授業が展開できていたかというと，このコースでは普段から自分の意見を発言する機会（授業に限らず，HRや面談なども含めて）を多くとっておられることもあるのでしょうが，生徒が安心して発言できる場となっていたからです。言ったことがきちんと受け止められる安心できる場が提供されているからであり，それは先生に生徒の発言を受け止めるキャパがないとできないことです。数学のことを深く理解して，数学のことを大好きな先生だから，生徒も安心して授業にのめりこんでいったのだと感じました。「自分で正しいと思ったことだけを言いなさい」というルールのもとで授業をされたわけですが，その中で，わかったつもりで（手法としては知っている）問題にあたっていることの多さ，本質の理解まで到達していないことを実感したのではないかと思います。公式を覚えて問題が解ければできた，でもそれは違うんだと気付くことができたのも，この授業を参観させていただいた大きな成果です。教材も基本の大切さがわかる問題で，さらにそれが基本から標準へと移行していく問題の配置となっており，問題が厳選され，一問に凝縮してあるように思いました。数をこなせばいいのは数学の教員くらいで，生徒は多くの教科をこなさなければならないのですから，少ない問題に多くの内容が盛り込まれている問題をいかに教員が提供できるかが大事だと思っていたところでしたので，これもまた参考にさせていただきたいと思いました。問題の前半でも，内分や実数倍の考え方，またなぜ1次独立でないといけないのかをじっくりと引き出しておられ，解くだけなら5分もあればできるけれど，その一問から多くのことを学ぶことができることを見せていただきました。教材研究の視点が変わりました。また，問題の後半，ベクトル方程式はやはりイメージできるようにさせておきたいなと思いました。問題を解くときに，ベクトルは最終的に計算で処理してしまうことが多くなりますが，感覚を持っていることが必要で，その基本がベクトル方程式なのだと気付かせてもらいました。

今回，先生の授業を参観させていただいたことで，テクニックに頼りがちだった自分の授業を反省するきっかけとなりました。教員が数学を深く愛して，その深さを授業で生徒とともに味わえるようになりたいと思います。この授業から，教員が研究し続けるその理由が1つ見えたように思います。一方で，質のそろった特別コースであるので出来たことでもあるのかなとも思います。多くの学校で学力差が大きくなっています。今回も後側でいっぱいいっぱいになりつつも，先生の思いに引っ張り続けられ，最後まで答えてくれた生徒もいましたが，そこまでもできない生徒にどう関わるか，グループ学習ではそこをまわりに教えてもらうことでカバーしている（悪く言えばごまかしている）のでしょうが，この部分が難しいなと感じました。

また，「それぞれまとめてごらん」という言葉が何度もありました。それができるレベルにしなければいけないのでしょうが，これもまた，不得意な生徒には模範が見えることで安心したり納得できたりすることもあると思います。もちろん教科書や問題集の模範解答を見て確認，最初の段階では例を挙げて解説などもするのかなとは思いますが，学力が低く，数学が不得意な生徒に諦めず，達成感をもたせながら授業を展開するにはどうすればいいのかなと考えながら見させていただきました。この部分が幅広い学力層を抱える地方公立

校の課題だとも思っています。

今回，授業を参観させていただいたことで，生徒の頭を動かす授業の展開をイメージすることができました。あわせて，そのために教材や発問のしかたなどの研究を進めていきたいと思いました。今回このような機会をいただきました竹内英人先生，石見智翠館高校の細木先生には感謝しています。これをしっかりと生徒に還元していきたいと思います。

【最後に】

世の中がめまぐるしく変化する時代です。そうした時代の中，よい意味でも悪い意味でも一番その変化に乗り遅れているのが教育かもしれません。それは一見，「不易流行」ともとらえることができますが，もはやそのくらいのスピードでは世界で通用しない時代になってきました。

そうした意味では今回の入試改革は，改めて日本の教育を，もっといえば教師1人1人が自分自身の授業を見つめ直すよい機会だと思います。

「アクティブラーニング」が単なる一時の流行語にならないように，今こそ我々教員が再度真剣に日本の教育，子どもたちの未来を考えるときだと思います。

「アクティブラーニング」はそんな日本の未来を変える鍵となるかもしれません。少なくとも私は本気でそう考えています。

ぜひ，先生方お一人お一人の自分にしかできない「アクティブラーニング」を実践していただければと思います。今回，私の未熟な実践を載せましたが，私もまだまだ勉強中の身です。全国の「本気で授業を変えようと思っている先生」，「日本の数学教育を変えたい」と思っている先生方と一緒に勉強できればと考えています。

現在，愛知県を中心に，「アクティブラーニング型授業」の勉強会を定期的に開催しております。関心のある方はぜひ一度ご連絡ください。一緒に学びましょう！

(takeuchi@meijo-u.ac.jp)

竹内先生の生徒対象，教員対象のSG出前授業をご希望の学校は，一度，啓林館の営業担当者を通じてご相談ください。

授業実践記録

理数科課題研究「三角関数の加法定理を利用してピタゴラス数を求める」～結果報告～

山口県立岩国高等学校　西元 教善

1．はじめに

理数科課題研究「三角関数の加法定理を利用してピタゴラス数を求める」～中間報告～では，

a，b，c がピタゴラス数のとき

$$\frac{|(a+bi)^n-(a-bi)^n|}{2},\ \frac{|(a+bi)^n+(a-bi)^n|}{2},\ c^n$$

(n は自然数) もまたピタゴラス数であることまで，生徒が探究していることを報告した。

本稿では，その後これがどのように進展していったかについて結果報告したい。なお，これまでの経緯は「中間報告」をご覧いただきたい。

2．研究第4日

10月16日(木)の4限に実施した。研究第2日で，三角関数の加法定理を利用して得られたピタゴラス数3，4，5からのピタゴラス数

$$\left(\left|\frac{i}{2}\{(4-3i)^n-(4+3i)^n\}\right|,\ \left|\frac{1}{2}\{(4-3i)^n+(4+3i)^n\}\right|,\ 5^n\right)$$

(n は自然数) をより簡潔に表すことを指示した。

なお，$z=a+bi$ (a，b は実数) のとき，z の実部 a を $\mathrm{Re}z$ で，z の虚部 b を $\mathrm{Im}z$ で表すことを教え，$|\mathrm{Re}(4+3i)^n|$，$|\mathrm{Im}(4+3i)^n|$，5^n がピタゴラス数になることを確認させた。また，未履修の数学Ⅲの第2章複素数平面にある「複素数の絶対値」について簡単に指導した。

さて，a，b，c をピタゴラス数とするとき，$|\mathrm{Re}(b+ai)^n|$，$|\mathrm{Im}(b+ai)^n|$，c^n はピタゴラス数を表すこと，さらに，これをよりきれいな結果にしたいので『a，b，c をピタゴラス数とするとき，$|\mathrm{Re}(a+bi)^n|$，$|\mathrm{Im}(a+bi)^n|$，c^n はピタゴラス数を表す』ことを考えさせた。ド・モアブルの定理を使ってもよいとヒントを出し，本日は1時間しかないので次回に考えるようにという指示を出しておいた。

a，b，c をピタゴラス数とするとき，$|\mathrm{Re}(a+bi)^n|$，$|\mathrm{Im}(a+bi)^n|$，c^n がピタゴラス数を表すことは，次のように説明できる。

$$a+bi=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right)$$

であるから，$\theta\,(0\leqq\theta<2\pi)$ を $\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を満たす角として，

$a+bi=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta+i\sin\theta)$ と変形するとド・モアブルの定理から

$$\begin{aligned}(a+bi)^n&=(\sqrt{a^2+b^2})^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)\\&=c^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)\end{aligned}$$

よって，

$$\mathrm{Re}(a+bi)^n=c^n\cos n\theta$$
$$\mathrm{Im}(a+bi)^n=c^n\sin n\theta$$

であるから

$$\{\mathrm{Re}(a+bi)^n\}^2+\{\mathrm{Im}(a+bi)^n\}^2$$
$$=(c^n)^2(\cos^2 n\theta+\sin^2 n\theta)=(c^n)^2$$

また，$\mathrm{Re}(a+bi)^n$，$\mathrm{Im}(a+bi)^n$ は a，b が自然数であることから，それぞれ0でない整数である。

よって，$|\mathrm{Re}(a+bi)^n|$，$|\mathrm{Im}(a+bi)^n|$ は自然数であり，

$$|\mathrm{Re}(a+bi)^n|^2+|\mathrm{Im}(a+bi)^n|^2=(c^n)^2$$

であることから，$|\mathrm{Re}(a+bi)^n|$，$|\mathrm{Im}(a+bi)^n|$，c^n はピタゴラス数を表す。

ここで，次の定理が得られたことになる。

> 定理　1組のピタゴラス数から無数の自明ではないピタゴラス数を作り出す方法
>
> a，b，c がピタゴラス数のとき，$|\mathrm{Re}(a+bi)^n|$，$|\mathrm{Im}(a+bi)^n|$，c^n (n は自然数) はピタゴラス数を表す。

3．研究第5日

10月23日(木)の3・4限に実施した。

生徒は上掲の定理が証明でき，次は何をすればよいかと考えていたので，三角関数の n 倍角の公式を考えたらどうかと助言した。

もともと，1組のピタゴラス数から無数の自明ではないピタゴラス数を三角関数の加法定理を使って作り出すとき，a，b，c（c が最大）がピタゴラス数のとき，$a_1=\sin\theta=\dfrac{a}{c}$，$b_1=\cos\theta=\dfrac{b}{c}$ とおき，加法定理から導かれる等式

$$\sin(n+1)\theta=\sin n\theta\cos\theta+\cos n\theta\sin\theta$$
$$\cos(n+1)\theta=\cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta$$

から数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の漸化式を作り，その一般項 a_n，b_n を求めることで新規のピタゴラス数を求めたのである。

それは $\cos n\theta$，$\sin n\theta$ を $\cos\theta$，$\sin\theta$ で表すことと同じである。そこでこのような助言をしたのである。

3限目は生徒にまかせて見守ることにした。生徒は手分けをして $n=5$ まで求めてそこから一般にどのような式になるかを推測しようと試みていた。当然ながら行き詰まったので，4限目にド・モアブルの定理を使うというヒントを与えた。

ド・モアブルの定理

（＊）　$\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$

より

$$\cos n\theta=\mathrm{Re}(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$
$$\sin n\theta=\mathrm{Im}(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$

である。

これは先ほどの定理と関連があることを注意しておいた。ド・モアブルの定理（＊）の右辺は二項定理を使えば，

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r\cos^{n-r}\theta\sin^r\theta\, i^r$$

となる。

ここで，i^r について r を

$r=4k-3$，$r=4k-2$，$r=4k-1$，$r=4k$

（k は自然数）

と場合分けすることで，

$$i^r=\begin{cases} i & (r=4k-3)\\ -1 & (r=4k-2)\\ -i & (r=4k-1)\\ 1 & (r=4k)\end{cases}$$

となるから，実部は $r=4k-2$，$4k$ のとき，虚部は $r=4k-3$，$4k-1$ のときであり，それぞれの場合の総和がそれぞれ $\cos n\theta$，$\sin n\theta$ である。

生徒はここまでは理解したが，そのまとめ方に行き詰まっていた。そこで，

$$\begin{cases}4k-3\text{ のとき} & 1\\ 4k-1\text{ のとき} & -1\end{cases},\quad \begin{cases}4k-2\text{ のとき} & -1\\ 4k\text{ のとき} & 1\end{cases}$$

であることを，l を自然数として，それぞれが $2l-1$ のとき $(-1)^{l-1}$，$2l$ のとき $(-1)^l$ と表され

$$i^r=\begin{cases}(-1)^{l-1}i & (r=2l-1\text{ のとき})\\ (-1)^l & (r=2l\text{ のとき})\end{cases}$$

であることをヒントとして与えた。A君はその意味を十分把握したようであった。

これより $n=2m$（m は自然数）のとき

$$\begin{aligned}
&(\cos\theta+i\sin\theta)^n\\
&=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r\cos^{n-r}\theta\sin^r\theta\, i^r\\
&=\sum_{l=0}^{m}(-1)^l{}_n\mathrm{C}_{2l}\cos^{2m-2l}\theta\sin^{2l}\theta\\
&\qquad+i\sum_{l=1}^{m}(-1)^{l-1}{}_n\mathrm{C}_{2l-1}\cos^{2m-2l+1}\theta\sin^{2l-1}\theta\\
&=\sum_{l=0}^{m}(-1)^l{}_n\mathrm{C}_{2l}(\cos^2\theta)^{m-l}(\sin^2\theta)^l\\
&\qquad+i\sum_{l=1}^{m}(-1)^{l-1}{}_n\mathrm{C}_{2l-1}(\cos^2\theta)^{m-l}\\
&\qquad\qquad\times\cos\theta(\sin^2\theta)^{l-1}\sin\theta\\
&=\sum_{l=0}^{m}(-1)^l{}_n\mathrm{C}_{2l}(\cos^2\theta)^{m-l}(1-\cos^2\theta)^l\\
&\qquad+i\sum_{l=1}^{m}(-1)^{l-1}{}_n\mathrm{C}_{2l-1}(1-\sin^2\theta)^{m-l}\\
&\qquad\qquad\times(\sin^2\theta)^{l-1}\sin\theta\cos\theta
\end{aligned}$$

ここで，実部と虚部の比較をして，

$$\cos n\theta=\sum_{l=0}^{m}(-1)^l{}_n\mathrm{C}_{2l}(\cos^2\theta)^{m-l}(1-\cos^2\theta)^l$$
$$\sin n\theta=\sum_{l=1}^{m}(-1)^{l-1}{}_n\mathrm{C}_{2l-1}(1-\sin^2\theta)^{m-l}(\sin^2\theta)^{l-1}\times\sin\theta\cos\theta$$

次に，$n=2m-1$ のときも同様にやってみるように言った。

4．研究第6日

11月6日（木）の3・4限に実施した。1名欠席のため3名で研究した。継続して，n 倍角の公式を導く考察を行った。一般的な場合で考察することは困難さがあるようなので，

① $n=4$，5，6，7，② $n=8$，9，10，11，

③ $n=12$，13，14，15の場合について分担して考察させた。

$n=4$ の場合は

ド・モアブルの定理から

$(\cos\theta+i\sin\theta)^4=\cos4\theta+i\cos4\theta$ であり，

二項定理からは，

$$\begin{aligned}
&(\cos\theta+i\sin\theta)^4\\
&=\sum_{r=0}^{4}{}_4\mathrm{C}_r\cos^{4-r}\theta(i\sin\theta)^r\\
&=\sum_{r=0}^{4}i^r{}_4\mathrm{C}_r\cos^{4-r}\theta\sin^r\theta\\
&={}_4\mathrm{C}_0\cos^4\theta+i{}_4\mathrm{C}_1\cos^3\theta\sin\theta-{}_4\mathrm{C}_2\cos^2\theta\sin^2\theta\\
&\qquad-i{}_4\mathrm{C}_3\cos\theta\sin^3\theta+{}_4\mathrm{C}_4\sin^4\theta\\
&=({}_4\mathrm{C}_0\cos^4\theta-{}_4\mathrm{C}_2\cos^2\theta\sin^2\theta+{}_4\mathrm{C}_4\sin^4\theta)\\
&\qquad+({}_4\mathrm{C}_1\cos^3\theta\sin\theta-{}_4\mathrm{C}_3\cos\theta\sin^3\theta)i
\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
&\cos4\theta+i\cos4\theta\\
&=({}_4\mathrm{C}_0\cos^4\theta-{}_4\mathrm{C}_2\cos^2\theta\sin^2\theta+{}_4\mathrm{C}_4\sin^4\theta)\\
&\qquad+({}_4\mathrm{C}_1\cos^3\theta\sin\theta-{}_4\mathrm{C}_3\cos\theta\sin^3\theta)i
\end{aligned}$$

ここで，実部と虚部を比較して，

$$\cos4\theta={}_4\mathrm{C}_0\cos^4\theta-{}_4\mathrm{C}_2\cos^2\theta\sin^2\theta+{}_4\mathrm{C}_4\sin^4\theta$$
$$\sin4\theta={}_4\mathrm{C}_1\cos^3\theta\sin\theta-{}_4\mathrm{C}_3\cos\theta\sin^3\theta$$

このような計算を $n=4$，……，15まですることによって，次の結果を得ていた。

・n が偶数のとき

$$\cos n\theta=\sum_{r=0}^{\frac{n}{2}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r}\cos^{n-2r}\theta\sin^{2r}\theta$$
$$\sin n\theta=\sum_{r=0}^{\frac{n-2}{2}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r+1}\cos^{n-2r-1}\theta\sin^{2r+1}\theta$$

・n が奇数のとき

$$\cos n\theta=\sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r}\cos^{n-2r}\theta\sin^{2r}\theta$$
$$\sin n\theta=\sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r+1}\cos^{n-2r-1}\theta\sin^{2r+1}\theta$$

得られた結果が正しいか，$n=1$，2，3の場合で確認するように言ったときには，既に取り組んでいた。暫くして確認できた，正しかったと報告を受けた。

これで三角関数の n 倍角の公式を導いたわけであるが研究の最後として，また，まとめとして以前求めた結果と関連付けてみるように指示した。

次のようにまとめた。

$$a+bi=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right)$$

であるから，

$\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ とおくと

$$a+bi=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta+i\sin\theta)$$

よって，

$$\begin{aligned}
&(a+bi)^n\\
&=\{\sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta+i\sin\theta)\}^n\\
&=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}(\cos n\theta+i\sin n\theta)
\end{aligned}$$

（ド・モアブルの定理より）

$$=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cos n\theta+i(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\sin n\theta$$

したがって，

$$\mathrm{Re}(a+bi)^n=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cos n\theta$$
$$\mathrm{Im}(a+bi)^n=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\sin n\theta$$

である。

『a，b，c がピタゴラス数のとき，

$|\mathrm{Re}(a+bi)^n|$，$|\mathrm{Im}(a+bi)^n|$，c^n（n は自然数）

はピタゴラス数を表す。』

が以前得られた研究結果であった。

これより，生徒は『a，b，c がピタゴラス数のとき，

$\left|(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cos n\theta\right|$，$\left|(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\sin n\theta\right|$，$c^n$

（n は自然数）

はピタゴラス数を表す。』とまとめていた。

確かにそうであるが，こちらが意図したことは，n 倍角の公式を使って，a，b，c で表すということである。

n が偶数のとき

$$\cos n\theta=\sum_{r=0}^{\frac{n}{2}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r}\cos^{n-2r}\theta\sin^{2r}\theta$$

$$\sin n\theta=\sum_{r=0}^{\frac{n-2}{2}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r+1}\cos^{n-2r-1}\theta\sin^{2r+1}\theta$$

n が奇数のとき

$$\cos n\theta=\sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r}\cos^{n-2r}\theta\sin^{2r}\theta$$

$$\sin n\theta=\sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r+1}\cos^{n-2r-1}\theta\sin^{2r+1}\theta$$

であり，$\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ より

$$\cos^{n-2r}\theta\sin^{2r}\theta$$
$$=\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^{n-2r}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^{2r}$$
$$=\frac{a^{n-2r}b^{2r}}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}$$

$$\cos^{n-2r-1}\theta\sin^{2r+1}\theta$$
$$=\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^{n-2r-1}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^{2r+1}$$
$$=\frac{a^{n-2r-1}b^{2r+1}}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}$$

であるから，

n が偶数のとき

$$\cos n\theta=\frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\sum_{r=0}^{\frac{n}{2}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r}a^{n-2r}b^{2r}$$

$$\sin n\theta=\frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\sum_{r=0}^{\frac{n-2}{2}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r+1}a^{n-2r-1}b^{2r+1}$$

n が奇数のとき

$$\cos n\theta=\frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r}a^{n-2r}b^{2r}$$

$$\sin n\theta=\frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r+1}a^{n-2r-1}b^{2r+1}$$

である。

ここで，偶奇によらず1つの式で表したいので，

$$\frac{1-(-1)^n}{2}=\begin{cases}0 & (n\text{は偶数})\\ 1 & (n\text{は奇数})\end{cases}$$

$$\frac{-1-(-1)^n}{2}=\begin{cases}-1 & (n\text{は偶数})\\ 0 & (n\text{は奇数})\end{cases}$$

であることを使えば，次のように表せる。

$$\begin{cases}n\text{が偶数のとき } \dfrac{n}{2}\\ n\text{が奇数のとき } \dfrac{n-1}{2}\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{n-\dfrac{1-(-1)^n}{2}}{2}=\frac{2n-1+(-1)^n}{4}$$

$$\begin{cases}n\text{が偶数のとき } \dfrac{n-2}{2}\\ n\text{が奇数のとき } \dfrac{n-1}{2}\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{n-1+\dfrac{-1-(-1)^n}{2}}{2}=\frac{2n-3-(-1)^n}{4}$$

これより，

$$\cos n\theta=\frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\sum_{r=0}^{\frac{2n-1+(-1)^n}{4}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r}a^{n-2r}b^{2r}$$

$$\sin n\theta=\frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\sum_{r=0}^{\frac{2n-3-(-1)^n}{4}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r+1}a^{n-2r-1}b^{2r+1}$$

であるから，

$$\left|(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cos n\theta\right|$$
$$=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\,|\cos n\theta|$$
$$=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}$$
$$\times\left|\sum_{r=0}^{\frac{2n-1+(-1)^n}{4}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r}a^{n-2r}b^{2r}\right|$$
$$=\left|\sum_{r=0}^{\frac{2n-1+(-1)^n}{4}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r}a^{n-2r}b^{2r}\right|$$

$$\left|(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\sin n\theta\right|$$
$$=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\,|\sin n\theta|$$
$$=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}$$
$$\times\left|\sum_{r=0}^{\frac{2n-3-(-1)^n}{4}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r+1}a^{n-2r-1}b^{2r+1}\right|$$
$$=\left|\sum_{r=0}^{\frac{2n-3-(-1)^n}{4}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r+1}a^{n-2r-1}b^{2r+1}\right|$$

したがって，a，b，c がピタゴラス数のとき，

$$\left|\sum_{r=0}^{\frac{2n-1+(-1)^n}{4}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r}a^{n-2r}b^{2r}\right|,$$

$$\left|\sum_{r=0}^{\frac{2n-3-(-1)^n}{4}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r+1}a^{n-2r-1}b^{2r+1}\right|,$$

c^n（n は自然数）

はピタゴラス数を表す。これが，本研究課題で得られた結果である。

A君はかなりいい所まで到達してきた。次回で研究は終了し，発表準備に取り掛かるが，これまでの研究内容をしっかりまとめ，手際よくプレゼンできるよう指導する。

4．研究第7日（発表日変更に伴う追加）

当初の年間計画では1月22日（木）に校内課題研究発表会が予定されていたが，1月29日（木）に変更された。1週間ずれたということで11月13日（木）3・4限も研究することになった。

次の時間からはコンピュータ室で発表の準備に取り掛かる。

校内発表用の原稿を県発表用の原稿も兼ねて作成するように指示した。原稿見本を保存したUSBメモリをA君に渡した。

校内発表は授業時間内に収めるために7分間，県発表は8～10分の発表＋3分の質疑・講評である。

研究内容を班員全員が共有・理解し，発表時の質疑に答えられるようにしておくよう指示した。そのためにお互いに教え合うように指示したが，結局はA君が中心となって説明し，他は聞くという形態になったが，これが原稿をまとめることに繋がった。

A君から最終結果は推測が基になっているがよいかと訊かれたので，一般的な n の場合の二項定理を使って証明するように指示した。

発表会では，一般的な式ではわかりづらいので，具体的な例 $a=3$，$b=4$，$c=5$；$n=2$，3，4を交えるとよいと助言した。

タイトル名は，当初「三角関数の加法定理を用いてピタゴラス数を求める」であったが，一貫して加法定理を使った研究とはいえなくなったので，「加法定理」をはずして「三角関数を用いてピタゴラス数を求める」としたらどうかと助言した。

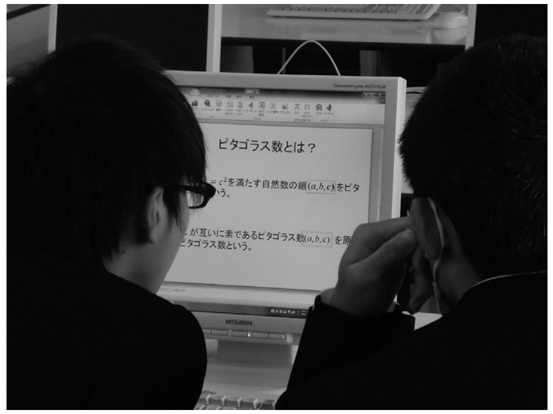
原稿は，1動機･目的，2方法，3結果，4考察･結論，5参考文献を1ページに収める必要がある。4限目は1～4について話し合っていた。

5．発表準備

11月20日（木）4限に実施した。理科の関係で4限のみの実施であった。

コンピュータ室で発表の準備にとりかかった。準備時間は7コマ（50分×7，当初より1コマ減）である。2台のパソコンを使って，1台ではワードで発表原稿の作成を，もう1台ではパワーポイントでプレゼンテーション用のスライドの作成にとりかかった。情報の時間で学習しているためか手馴れたようすで作成していった。

発表準備のようす（原稿，プレゼン準備）



6．発表

実施日　平成26年1月29日(木)5限

場　所　視聴覚教室

参加者　2年次理数科(2－1)生徒，1年次理数科(1－1)生徒，校長，副校長，教頭，数学・理科教員，実習助手
数学教員14名，理科教員・実習助手12名(時間変更で，数学・理科教員の5限はすべて空けてある。)

発　表　数学(2班)，物理(2班)，化学(1班)，生物(2班)

要　領　各班7分(出入り，質疑を含む)
数学科教員は数学班の，理科教員は理科班の評価をする。(他教科は感想のみ)生徒にも感想を書かせる。また，1年次生は来年度希望分野の予備調査も行う。

各班の題目

1班(数学)　三角関数を利用してピタゴラス数を求める

2班(数学)　折り返し数列の一般項～さらなる一般化と拡張～

3班(物理)　テーブルクロスを引き抜くには？

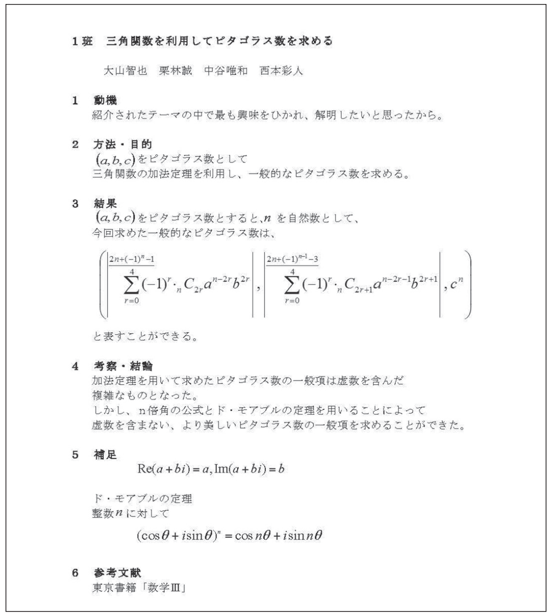
4班(物理)　スリンキーの運動の解析

5班(化学)　意外に身近な「硬度」の秘密

6班(生物)　イワシに潜む微生物

7班(生物)　クマムシの研究

1班の発表原稿(A4判1枚)



1班　三角関数を利用してピタゴラス数を求める

大山智也　栗林誠　中谷唯和　西本彩人

1　動機
紹介されたテーマの中で最も興味をひかれ、解明したいと思ったから。

2　方法・目的
(a,b,c)をピタゴラス数として
三角関数の加法定理を利用し、一般的なピタゴラス数を求める。

3　結果
(a,b,c)をピタゴラス数とすると、n を自然数として、
今回求めた一般的なピタゴラス数は、

$$\left(\left|\sum_{r=0}^{\frac{2n+(-1)^n-1}{4}}(-1)^r\cdot{}_nC_{2r}a^{n-2r}b^{2r}\right|,\left|\sum_{r=0}^{\frac{2n+(-1)^{n-1}-3}{4}}(-1)^r\cdot{}_nC_{2r+1}a^{n-2r-1}b^{2r+1}\right|,c^n\right)$$

と表すことができる。

4　考察・結論
加法定理を用いて求めたピタゴラス数の一般項は虚数を含んだ
複雑なものとなった。
しかし、n倍角の公式とド・モアブルの定理を用いることによって
虚数を含まない、より美しいピタゴラス数の一般項を求めることができた。

5　補足

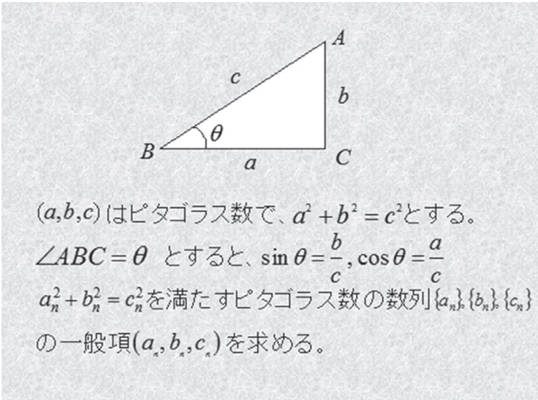
$$\mathrm{Re}(a+bi)=a,\mathrm{Im}(a+bi)=b$$

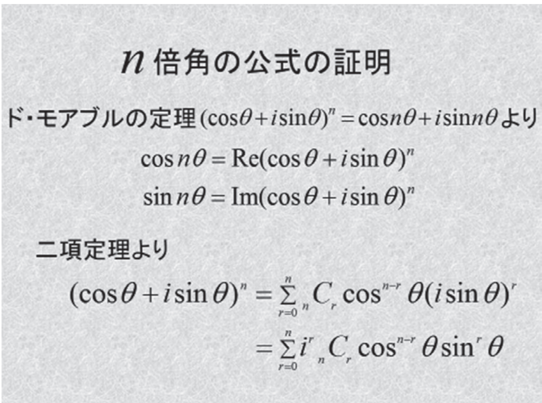
ド・モアブルの定理
整数nに対して

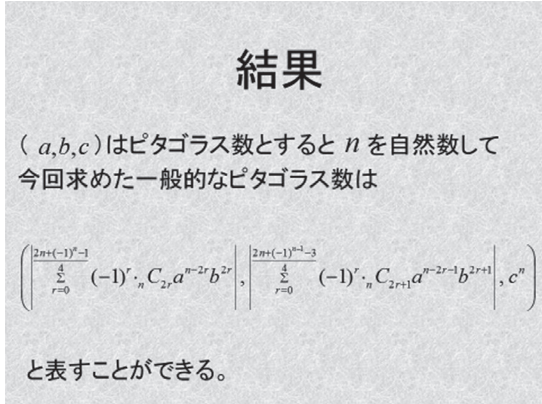
$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

6　参考文献
東京書籍「数学Ⅲ」

1班のパワーポイントスライド(抜粋)







発表のようす

評価

トップバッターで発表したためか緊張し，時間内にプレゼンテーションが終わらなかった。そのため結論まで説明することができなかった。また，理科のように映像を取り入れてわかりやすい説明になっていなかった。具体例で説明する時間もなく複雑な式の羅列という印象を受けたようである。(特に1年次生にとって)長い思考の結果得られた数式をわずか数分で理解してもらうことは難しかったようである。研究した内容はレベルの高いものであったが，プレゼン方法についての研究が不足していたと反省している。

これは反省会のときにも話題になったことであるが，どうしても数学は理科と比べるとプレゼンで見栄えのしないもの，アピール性が低いものになってしまうハンデがあるようである。

今回は数学を研究対象にした生徒が多かった(8人／36人)が，来年度はこの発表時にアンケートしたところ3人しかいないようであった。

もう一度「理数科課題研究」を担当して反省を活かしたいみたいという気持ちがあるが，定年退職も近くそれも叶いそうにない。心残りであるが，後輩教員に託したい。

真の数学力が身につく

Focus Gold（フォーカス・ゴールド） 新課程

A５判
3色刷

数学I+A，数学II+B
数学II，数学III

1. 『先に進める学習』と『基本も押さえる』に応えた「マスター編」
   フォローアップ（進める学習）とフィードバック（振り返り学習）で入試に必要な学力が確実に身につきます。
2. 充実したコラム
   数学への興味や知識の深まりなどが感じられる内容になっています。

入試に必要な「数学の本質」が確実に身につく

システム数学　入試必修問題集シリーズ

- 河合塾の徹底した入試分析で良質の問題を厳選
- 難関国公私立大学の入試に対応した『実戦』と国公私立大学の入試に対応した『練磨』の２シリーズ発刊
- 入試に必要な重要問題で構成したテーマ別問題と，最近の傾向で学習できる総合演習問題の２部構成

実　戦	数学I・II・A・B	A5判	192頁／定価本体600円＋税 【解答（別冊）】A5判／276頁／定価本体476円＋税
実　戦	数学III	A5判	116頁／定価本体467円＋税 【解答（別冊）】A5判／180頁／定価本体495円＋税
練　磨	数学I・II・A・B	A5判	152頁／定価本体571円＋税 【解答（別冊）】A5判／168頁／定価本体286円＋税
練　磨	数学III	A5判	96頁／定価本体381円＋税 【解答（別冊）】A5判／100頁／定価本体238円＋税

理数教育の未来へ
啓林館
http://www.shinko-keirin.co.jp/

〒543-0052　大阪市天王寺区大道4-3-25　TEL.06-6779-1531　FAX.06-6779-5011
〒113-0023　東京都文京区向丘2-3-10　TEL.03-3814-2151　FAX.03-3814-2159
〒003-0005　札幌市白石区東札幌5条2-6-1　TEL.011-842-8595　FAX.011-842-8594
〒461-0004　名古屋市東区葵1-4-34 双栄ビル2F　TEL.052-935-2585　FAX.052-936-4541
〒732-0052　広島市東区光町1-7-11 広島CDビル5F　TEL.082-261-7246　FAX.082-261-5400
〒810-0022　福岡市中央区薬院1-5-6 ハイヒルズビル5F　TEL.092-725-6677　FAX.092-725-6680

20160401