啓林館 高校数学 教育情報誌

啓林館

Focus Gold 通信

フォーカスゴールド

vol.11

特集

海外で求められている日本の数学 ～マレーシア政府派遣留学生の指導を通して～ Vol.2

日本の数学は世界のさまざまな場面で求められています。今回もマレーシアにて行われている取り組みについて紹介します。

「志ありき　心のバトン　微積分」

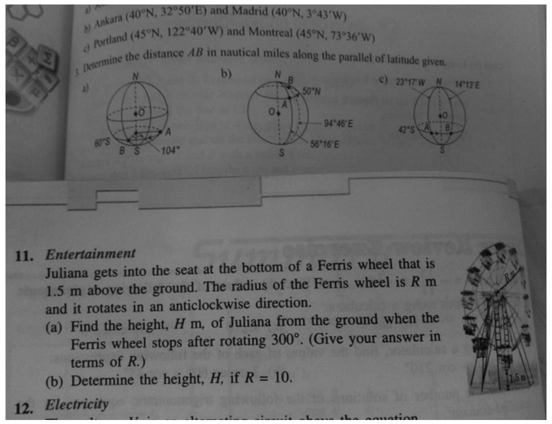
竹歳真一

みなさんはじめまして。

鳥取県倉吉西高等学校の竹歳真一（たけとし　しんいち）と申します。

一昨年4月から今年の3月まで日本政府派遣教師として，マレーシアのマラヤ大学において日本の大学への留学志願者に日本の数学を指導しておりました。今回はこのような場をいただき，現在マレーシア（海外）での数学の指導においての所感をお伝えできればと思っております。マレーシアの学生に，日本の大学での学びに必要な数学の力を身に付けられるように，日本の高校数学の数学ⅠＡⅡＢⅢＣを大学入試レベルまで指導していました。

一昨年私が指導した分野は，「三角比，三角関数，数列，ベクトル，行列，二次曲線」です。この1年間指導した中で，とくに三角比，三角関数の指導の中で印象的な一部を紹介させていただきます。



1．「分数の書き方と読み方」

日本と海外で数学の表現や認識で大きく異なるのは，分数です。日本は分母から分子と意識しますが，マレーシア（海外）では，分子から分母です。

三角比の定義は同じですが，sin の値は「斜辺分の高さ」だから斜辺が 5，高さが 4 の直角三角形は「5 分の 4」と分数は下から読む。

海外では「four over　five フォー オバー ファイブ」や「four fifth フォー フィフス」ですが，日本では，「5 ぶんの 4」です。日本の読み方，書き方の指導後，$\frac{4}{5}$ の記述を $\frac{5}{4}$ としてしまう学生もいました。

2．「SOH，CAH，TOA　ソー，カー，トア」

当然，sin の値の覚え方も逆です。日本では，筆記体の「𝒮」を書くように，斜辺から高さですが，海外では「SOH，CAH，TOA　ソー，カー（チャ），トア」です。斜辺＝hypotenuse　対辺＝opposite 接辺＝adjacent の頭文字で，SOHは Sin の値は $\frac{\text{Opposite}}{\text{Hypotenuse}}$ という覚え方をしています。Sinの値はOpposite over Hypotenuse となり，SOH です。アメリカやイギリスのケンブリッジ式も同様です。

「ソー，カー，トア」自然な流れです。日本語は分数を分母から表現しますが，これも海外の学生からすると混乱の要因のようです。

3．「日本では cos75° は使わない？」

正弦定理，余弦定理を使って，辺や角の大きさを求めます。海外の高校では，どんな角でも sin，cos，tan の値を使います。日本では，30°，45°，60° など各辺の比がわかっている角しか使えません。半角，二倍角の公式から導くしかありません。関数電卓なしで考える日本の高校数学は，絞り込みの力が必要です。

昨年教えていたマラヤ大学の学生は，日本の高校数学に窮屈さを感じていました。実用的な数学を学んでいる海外の学生の思考は，指導していてすごく勉強になります。

4．「三角比の拡張」

1コマで三角比の拡張 360° まで指導します。超ハイスピードの進度です。学生もよくついてきています。θ が 90° までの三角比は直角三角形で求まりますが，sin120° はどうやって求めますか?

座標軸での定義をしたあと，日本では単位円を使用しますが，これがまた大混乱！ sin のグラフを使いこなしている学生からすると，わざわざ単位円を使うことに違和感を感じていました。sin カーブから対称性を考えて処理しています。

5．「単位円は必要？」

新入生に三角比の拡張で座標からの三角比を指導しました。単位円の使い方も。翌日確認小テストを行ったが，ほとんどの生徒が単位円を使用してません。単位円を使用する解法に，学生は違和感を感じています。

$\sin\theta=\frac{1}{2}$　の $\theta=$？　$(0^\circ\leqq\theta\leqq360^\circ)$

① $\sin\theta=\frac{1}{2}>0$ だから　θ は第Ⅰ，Ⅱ象限

② ソーカートアの流れでopposite＝1，hypotenuse＝2 の三角形を書く

③ 第Ⅰ象限の角 30° を求める

④ 180° との対称性から 180－30＝150

⑤ よって $\theta=30^\circ$，150°

単位円は全く必要ない。

私が日本で教えてきた学生にも，単位円をほとんど使用しないで，対称性を意識して指導してきました。全国の数学の先生方のご意見を是非お聞きしたいです。

グラフの外形から判断する学習は道のり，速度，加速度など物理の分野でもグラフの読み取りを大切にしています。

sin　＋＋－－

プーラス，プーラス，マイナス，マイナス

cos　＋－－＋

プーラス，マイナス，マイナス，プーラス

tan　＋－＋－

プーラス，マイナス，プーラス，マイナス

(リズムよく♪)

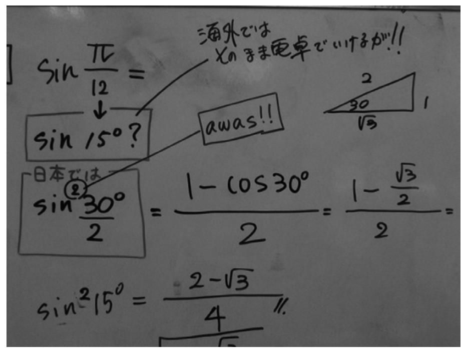
sin120° は第Ⅱ象限だから値は＋で 180° との差は 60°

よって，$\sin 120^\circ=+\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

cos240° は第Ⅲ象限だから値は－で 180° との差は60°

よって，$\cos240^\circ=-\cos60^\circ=-\frac{1}{2}$

ただし，ほとんどの学生が関数電卓で分数でなく，小数で値を求めていました。



分数でも正解であることの安心感を教えています。講義では関数電卓は使用していません。

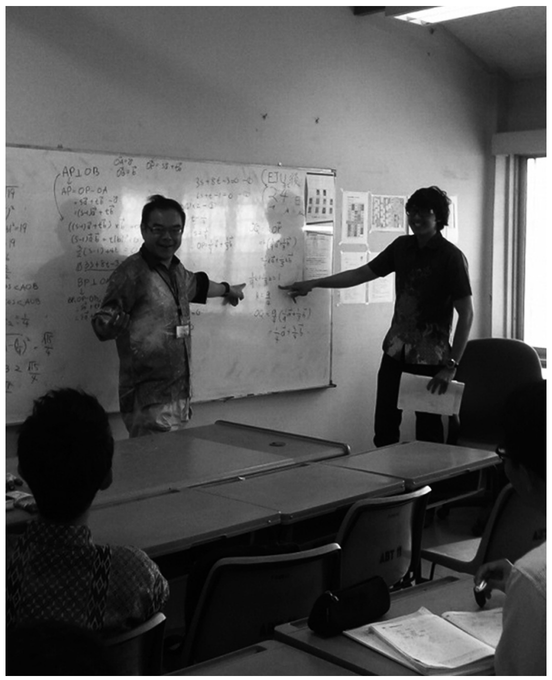
6．「数の値」

求値問題など，日本では $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ などルートや分数の形で終わりにしますが，海外では，数値 0.866 と表します。数直線上のどのあたりにその値があるのか，位置的感覚はあるようです。

物理量の具体的感覚。球の表面積は，その球の断面積の 4 倍である。みかんの皮を剥いたら，みかんの大きさ（断面積）の 4 倍分の皮ができる。実用的実感を身につけています。

7．「プレゼン能力」

講義をしたあと，問題演習を行っています。初め私が説明の仕方を教えますが，学生たちにもゼミ形式で解説をさせていました。非常に発表の仕方がうまいです。なぜ，このように考えたか。こんなことをやったら失敗したので，次はこうしてみた。マレーシアの高校ではこのようにしたが，日本式はこうだとか。上記にも示した内容は，学生の発表からわかったことが多いです。いかに，学生に自分の意見を言わせるか！教え込むだけでなく，試行錯誤の学生の思考に，我々の指導のヒントがたくさんあります。日本でも教員の知識自慢の押しつけは苦痛でしかないと同様に，海外でも同じようです。学生をはじめ他者の意見を聞く勇気がある指導者を学生たちは求めています。学生達の機動力，企画力もすばらしいものがあります。



次の英文を読んで，以下の問いに答えなさい。

『Any point in a Caresian coordinate system is represented by its x−coordinate and y−coordinate and it is written as(x, y). For a point on the surface of the earth, …』

英文を読むと，たくさんわからない単語が出てくる。単語を英和辞典で調べ，語句の意味を日本語で理解する。時間はかかるが，少しずつ英文が和訳でき文の内容が理解でき，問いに答えられるようになる。レベルが上がれば，英文も社会問題や哲学的な内容になり，その分野の基本知識がないと，理解さえできない。

『北を向いて立っている。右を向いたら方角はどこ？　（正解）東である。』

右左，東西南北の方角関係がわからないと答えはでてこない。問題文に東はどこにもでてこない。

海外での数学指導において，このような場面がよくあります。

マレーシアの学生が日本語の単語を理解し，文章として文脈を理解し解読してゆく。それもわずか，1年半の短期間で。日本人が英語を学び，英文の数学の問題が解けるだろうか？大学時代のゼミで英文を読み解読し，理解していった自分と比較すると，今指導している学生は驚異的なスピードで日本語や日本の学問を理解しています。

日本では，常識的に使っている数学の用語も実は，生徒に理解されないまま使用していたのではないか？と，今までの自分の指導法を再確認できる機会をいま与えていただいています。

小学校，中学校では海外の日本人学校で指導できる機会がありますが，高校教師が海外で指導できる機会はほとんどありません。ましてや，現地の学生に直接教えることはなかなか経験できないことです。

みなさん，ぜひマレーシア　マラヤ大学で，現地の学生に日本の数学を指導してみませんか？今までの自分の指導方法の再確認と新しい指導方法が発見できるとおもいます。

生徒の学習方法が悪いのではなく，自分の教え方が良いか悪いかはっきり見えてきます。

日本の大学に留学していった学生の今後の活躍を楽しみしています。

「マレーシア・ボレ！！」

竹歳 真一　たけとし しんいち

鳥取県東伯郡北栄町生まれ。
1999年文部省米国（デンバー）派遣教員。
2008年～2013年鳥取県エキスパート教員。
高大接続研究会，進路講演会，難関大学志願者合宿など全国でパネリスト，講師をつとめる。英語や国語や体育など他教科の授業参観から得られるものが多く，他教科参観も好む。有名進学校の名物先生だけでなく，部活指導において全国で活躍されている方の指導方法や企業で活躍されている方から組織力も学んでいる。
主体的学習者の育成，活力のある学校作りを目指し，大きな声でのあいさつを心がけている。
鳥取県立倉吉東高校，鳥取県立倉吉総合産業高校などを経て，2013年度より日本政府派遣教師として，マレーシア大学予備教育学部日本留学特別コースに勤務。担当教科は数学。
現在は，鳥取県立倉吉西高等学校勤務。

マレーシアの教育環境と学生たちの様子について

行村康則

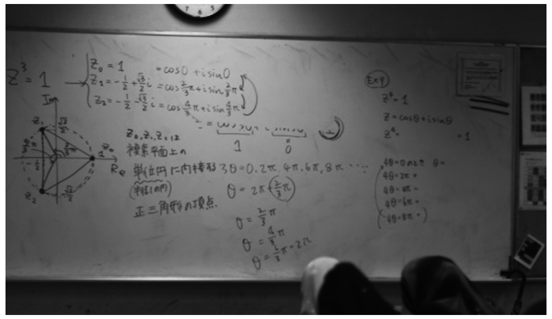
2013年4月よりマレーシア政府派遣学部留学生予備教育センター日本人教師団の一員としてマラヤ大学予備教育科で数学を担当していました行村康則（ゆくむらやすのり）です。一昨年の4月までは山口県熊毛南高等学校で教諭として勤務をしていました。前回の特集で沢畑，成田がマレーシアでの様子を詳しく書かせていただきました。その続きとしてマレーシアの教育課程や学生たちの様子，そして日本にはないものをお知らせしてみたいと思います。

1．マレーシアの学ぶ姿勢

私たちが派遣されているここAAJ（日本へ留学を目指すコース）は日本の大学へ入学をしたい生徒たちが応募をして入学してきます。しかし，日本語や高校卒業程度の学習内容を1年間で終了するのは不可能のため2年間のカリキュラムで行います。1年生は5月中旬から下旬にかけて入学をしてきます。このとき生徒たちはほぼまったく日本語はわかりません。しかし，朝から晩までの日本語集中授業により，10月に我々教科が授業をする頃には日本語の半分以上は理解できるレベルまでできるようになります。まだまだ不十分な部分がありますが，日本語で授業をすすめることができます。

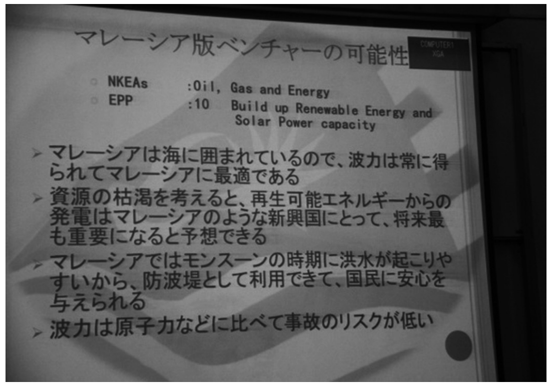
授業では，テキストの文書や問題文を一緒に声に出して読んでいます。読めない漢字や意味が分からないところは，英語をできるだけ使わずに話すことで日本語と数学の意味を合わせて知ることができてきます。1年生には1年間かけて高校数学の1，2年生の内容を行っていきます。教科書や問題集からおこした，授業で扱いやすい独自のテキストを使っています。2週間に1回のペースで単元テストを行い学習の定着を図っています。70点未満の学生は追試を行い，弱い単元ではほぼ全員になるときもありますが，追試に向けても全力で取り組んでいます。

数学のみならず，ほかの教科も同様に行なっています。生徒の授業は1日9時間（50分×9）授業です。朝8時から夕方18時までです。しかもその9時間分の宿題が各教科から出題されますのでかなりの量になりますが，マレーシアの生徒たちは宿題をほぼ必ずやってきて提出をします。また，宿題を持ってくるのを忘れたり，やらなかった時にはこの世の終わりのような表情で謝ってきます。このような生徒たちですので，日本語の上達も早く，学習内容も確実に定着していくのを感じます。



2．プレゼン能力の高さ

2年生になるとさらに学習内容は深くなっていき初めて学習をする三角関数の微分積分などの数学Ⅲの内容をしていきます。その学習内容もわずか3か月で終わり，そこからEJU試験（日本へ留学するための共通試験）に向けて実践演習問題を大量にこなしていきます。日本語と数学，（物理や化学もですが）を一から学習をしてたった1年と少しです。実践演習問題を宿題で生徒にあてておいて，授業で一人一人が問題の解法を説明するということをしてきました。当然日本語です。最初から数学の記号の読み方を一緒に丁寧に教えていっただけあり，問題の中で出てくる数式の読み方なども不自由なく言うことができました。



わかりやすい日本語で自分がどのように解いていったかを，周りの生徒たちに教えます。プレゼンテーション能力はとても高く，表情豊かに様々な解法や解き方で伝えることができました。またそのプレゼンを聞いている生徒たちも，わかるためにはどうすればいいかを一生懸命考え，同じ方向に向かっていることで，質の高い質問をします。前に立ち，発表することは素晴らしいことであり，あこがれる部分であるという考えが根底にあり，日本の多くの学生たちとは違う部分だと感じました。全員が同じことが一般的とされている日本とは異なり，このマレーシアでは人種をはじめ言葉の違いがあり，全員違うことが当たり前とされています。そのためなのか，人とは違う部分で，自分の能力を生かせることをアピールする場面を自身で創り出すことに長けていると感じています。多民族国家であるマレーシアでは，高校の過程の中の第2外国語としてアラビア語・マンダリン(中国語)・フランス語・そして日本語を高校で学びます。

書くことや文法に重点を置かず会話を大事にしているようです。マレーシアではマレー語が母国語ですが，人種が混在しているためマレー語だけでは生活するのは困難になります。そのため，自己主張をするためにいかにコミュニケーションをとれるかが自然のうちに身についてきているのだと感じました。

3．全国で活躍されている先生方へ

学生のころから，海外での生活にあこがれがあり，今回の政府派遣に迷うことなく申し込みました。今回の派遣で，視野が広がり世界の中の一つとして日本を見ることができるようになりました。また，こちらの企業等で活躍している日本人の多くが英語を利用していろんな人脈や知識を使い仕事を創り出していることにも感心しました。私も帰国した際には，英語の重要性や，世界には積極的にコミュニケーションをとり自分の能力を生かそうとしている若者が多くいることを，日本の生徒たちに伝えることができればと考えています。5月か6月に文科省から各県へ募集があります。夢と希望を熱く持ったマレーシアの学生たちに日本の大学で多くのことを学んでもらうための一役をかってみませんか？

行村 康則　ゆくむら やすのり

山口県生まれ。
筑波大学第一学群自然学類数学科卒業。
山口県立徳山工業高校，下松高校，熊毛南高校を経て，
2013年4月からマレーシア政府派遣留学生予備教育教員として
マラヤ大学予備教育センターに勤務。
現在，広島県立祇園北高等学校勤務。

授業
実践記録

理数科課題研究「三角関数の加法定理を利用してピタゴラス数を求める」～中間報告～

山口県立岩国高等学校　西元 教善

1．はじめに

2014年8月掲載の授業実践記録「生徒が興味・関心を抱く数学について～理数科課題研究テーマ選定より～」の結語で「研究テーマ決定後の研究のようす」，「研究の成果と発表」について報告したいと結んだ。同年10月現在，生徒は研究科目（数学，物理，化学，生物の中から1つ）と研究テーマを決めてグループで研究を進めている。本稿では，生徒がどのようなテーマを選び，どのような研究をしているかについて紹介をしたい。

6月に行った「課題研究（数学）～研究テーマを考える～」では54個の研究テーマを紹介し，興味･関心のあるテーマについて，アンケートを行った結果，圧倒的に支持されたのが「偏差値が100以上，0以下になるのはどんな時か」，次いで「星形正n角形の面積について」であった。数学を研究したい生徒が何名いるか（36人中），彼ら彼女らが一体何を研究テーマにするのか，指導者としても興味・関心が強くあった。

結局，8名の希望者（男子7名，女子1名）があり，課題研究の開始となった。研究初日（7月3日）は，数学の担当者が2名であることから，研究してみたいテーマを2つに絞り，A，Bの2班に分け，今後の研究方法等を話し合う時間とした。均等な班構成になればよいがと思ったが，うまくそのようになった。研究テーマはA班（男子4名）が「三角関数の加法定理を利用してピタゴラス数を求める」，B班（男子3名，女子1名）が「折り返し数列の一般項」であった。

私が担当したのはA班である。三角関数は数学Ⅱ，数列は数学Bの内容であり，私は数学Ⅱの授業を，もう一人は数学Bを担当しているからという理由である。

2．研究第1日

課題研究に使える時間は限られている。年間計画では実質的に研究時間として確保されているのは50分×12である。他に発表準備が50分×8，発表会（1月下旬実施）が50分，また，事前の全体説明や班分け，数学，物理，化学，生物の課題研究説明会等（4月～7月）がある。

課題研究は隔週の木曜日の3，4時限（50分×2）を使うので，実質6日間しかない。このような短期間に課題研究としてその名に値する研究が本当にできるだろうかという不安があった。実際，昨年度の発表会（昨年度は，前期は全員で数学を，後期は全員で理科を研究）では黄金比，白銀比，フィボナッチ数列，音階と数列，パラドックスといったありふれたテーマ，しかも同一テーマを研究対象とする班もあるというありさまであったからである。今年度，数学の課題研究説明で50余の研究テーマを紹介した背景には，あまりも型にはまりきった内容は避け，かといって，大学院生や大学の先生の指導が明白に見えるような内容も避け，高校生らしい課題を研究対象として成果も得たいという思いが強くあったからである。

7月の課題研究は，選んだ科目ごとで研究テーマを選定し，それに伴う班分けや今後の研究計画について話し合うということであったが，結局は夏季休業中に各自で研究用の資料収集や情報収集に努め，9月4日から実質的な研究に入るということになった。

研究第1日は体育祭準備のため午前中4時限までの45分授業であり，また研究の方向性も各自で十分には決まっていなかったので，それについ

て助言することから始めた。

事前指導で紹介した「三角関数の加法定理を利用してピタゴラス数を求める」をもとに，加法定理から n $(n=2,\ 3)$ 倍角の公式を導くことと同様にして，最も簡単なピタゴラス数 3，4，5 から他のピタゴラス数を導くことを紹介した。

2 倍角の公式を使うことで 7，24，25 というピタゴラス数を導くことができる。では 3 倍角の公式を使えばどのようなピタゴラス数が得られるか，さらには 4 倍角を考えることでどのようなピタゴラス数が得られるかを考えてみようと促した。

ピタゴラス数 3，4，5 から，$3^2+4^2=5^2$

よって，$\left(\dfrac{3}{5}\right)^2+\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=1$

である。そこで，

$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$ とおき，2 倍角の公式から

$\sin2\theta=\dfrac{24}{25}$，$\cos2\theta=\dfrac{7}{25}$ が得られて，これより 7，24，25 がピタゴラス数として得られる。

次に，3 倍角の公式，あるいは加法定理から

$$\sin3\theta=\sin(2\theta+\theta)=\sin2\theta\cos\theta+\cos2\theta\sin\theta$$
$$\cos3\theta=\cos(2\theta+\theta)=\cos2\theta\cos\theta-\sin2\theta\sin\theta$$

である。$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$，$\sin2\theta=\dfrac{24}{25}$，

$\cos2\theta=\dfrac{7}{25}$ を代入して，

$$\sin3\theta=\frac{117}{125},\ \cos3\theta=-\frac{44}{125}$$

を得て，これより 44，117，125 がピタゴラス数である。

このようにして，ピタゴラス数 $|a_n|$，$|b_n|$，c_n $(n=2,\ 3,\ 4)$ を 4 名の班員が求めた。

次に，$n=1$ から $n=4$ まで調べて得られた結果 $(|a_n|,\ |b_n|,\ c_n)=(3,\ 4,\ 5)$，$(7,\ 24,\ 25)$，$(44,\ 117,\ 125)$，$(336,\ 527,\ 625)$ から一般項が即座にわかるものを答えさせ $(c_n=5^n)$，そのときの他の 2 数を第 n 項とする数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項がどのように表されるか（これがわかれば最も簡単なピタゴラス数 3，4，5 からピタゴラス数が無限に作られたことになる）について調べてみることを提言した。

具体的には，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の連立隣接 2 項間の漸化式を作り，それから一般項 a_n，b_n を求めればよい。

$\alpha_n=\dfrac{a_n}{c_n}=\sin n\theta$，$\beta_n=\dfrac{b_n}{c_n}=\cos n\theta$ とおくと

$a_1=3$，$b_1=4$，$c_1=5$ より

$$\alpha_1=\frac{a_1}{c_1}=\sin\theta=\frac{3}{5},\quad \beta_1=\frac{b_1}{c_1}=\cos\theta=\frac{4}{5}$$

である。

すると，加法定理からの等式

$$\sin(n+1)\theta=\sin n\theta\cos\theta+\cos n\theta\sin\theta$$
$$\cos(n+1)\theta=\cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta$$

より

$$\alpha_{n+1}=\frac{4}{5}\alpha_n+\frac{3}{5}\beta_n \quad\cdots\cdots①$$
$$\beta_{n+1}=-\frac{3}{5}\alpha_n+\frac{4}{5}\beta_n \quad\cdots\cdots②$$

という実数列 $\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$ についての連立漸化式が得られるので，あとは，この連立漸化式を満たす数列 $\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$ の一般項を求めるように指示した。

少々大変かなと思ったが，A 君がそれぞれの数列を隣接 3 項間の漸化式に変形してその一般項を導き解き始めた。その特性方程式は異なる 2 つの虚数解をもつので面くらったようであるが，虚数解でもよいと助言すると黙々と計算を続けて一般項を出してしまった。他の生徒が唖然とする中で研究第 1 日は終了した。

A 班「三角関数の加法定理を利用してピタゴラス数を求める」の第 1 日のようす

3．研究第2日

2 週間後の 9 月 18 日（木）3・4 限に実施した。研究第 1 日で A 君がそれぞれの数列を隣接 3 項間の漸化式に変形してその一般項を求めたが，私が準備していた解答は次のようなものである。

$\alpha_{n+1}-k\beta_{n+1}$（$k$ はある定数）を考えると，①，②より，

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1}-k\beta_{n+1}&=\frac{4}{5}\alpha_n+\frac{3}{5}\beta_n-k\left(-\frac{3}{5}\alpha_n+\frac{4}{5}\beta_n\right)\\&=\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}k\right)\alpha_n+\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}k\right)\beta_n\\&=\frac{3k+4}{5}\alpha_n-\frac{4k-3}{5}\beta_n\\&=\frac{3k+4}{5}\left(\alpha_n-\frac{4k-3}{3k+4}\beta_n\right)\end{aligned}$$

ここで，$\dfrac{4k-3}{3k+4}=k$ を満たすように定数 k の値を定めると，$4k-3=3k^2+4k$ より $k^2=-1$

よって，$k=\pm i$ である。

$k=i$ のとき

$$\alpha_{n+1}-\beta_{n+1}i=\frac{4+3i}{5}(\alpha_n-\beta_n i)$$

であるから，数列 $\{\alpha_n-\beta_n i\}$ は初項が

$\alpha_1-\beta_1 i=\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i=\dfrac{3-4i}{5}$ で，公比が $\dfrac{4+3i}{5}$ の等比数列であるから，

$$\alpha_n-\beta_n i=\frac{3-4i}{5}\left(\frac{4+3i}{5}\right)^{n-1}\cdots\cdots③$$

である。

$k=-i$ のとき，同様にすれば，

$$\alpha_n+\beta_n i=\frac{3+4i}{5}\left(\frac{4-3i}{5}\right)^{n-1}\cdots\cdots④$$

これは α_n，$\beta_n\in R$ であることから，

$$\overline{\alpha_n-\beta_n i}=\overline{\frac{3-4i}{5}\left(\frac{4+3i}{5}\right)^{n-1}}$$

よって，$\alpha_n+\beta_n i=\dfrac{3+4i}{5}\left(\dfrac{4-3i}{5}\right)^{n-1}$

であるとしても求められる。

③＋④より，

$$2\alpha_n=\frac{3-4i}{5}\left(\frac{4+3i}{5}\right)^{n-1}+\frac{3+4i}{5}\left(\frac{4-3i}{5}\right)^{n-1}$$

よって，

$$\alpha_n=\frac{1}{2}\left\{\frac{3-4i}{5}\left(\frac{4+3i}{5}\right)^{n-1}+\frac{3+4i}{5}\left(\frac{4-3i}{5}\right)^{n-1}\right\}\quad\cdots\cdots⑤$$

また，④，⑤より，

$$\begin{aligned}\beta_n i&=\frac{3+4i}{5}\left(\frac{4-3i}{5}\right)^{n-1}\\&\quad-\frac{1}{2}\left\{\frac{3-4i}{5}\left(\frac{4+3i}{5}\right)^{n-1}+\frac{3+4i}{5}\left(\frac{4-3i}{5}\right)^{n-1}\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{3+4i}{5}\left(\frac{4-3i}{5}\right)^{n-1}-\frac{3-4i}{5}\left(\frac{4+3i}{5}\right)^{n-1}\right\}\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\beta_n&=(-i)\frac{1}{2}\left\{\frac{3+4i}{5}\left(\frac{4-3i}{5}\right)^{n-1}-\frac{3-4i}{5}\left(\frac{4+3i}{5}\right)^{n-1}\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{4-3i}{5}\left(\frac{4-3i}{5}\right)^{n-1}+\frac{4+3i}{5}\left(\frac{4+3i}{5}\right)^{n-1}\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{4-3i}{5}\right)^{n}+\left(\frac{4+3i}{5}\right)^{n}\right\}\end{aligned}$$

また，

$$\alpha_n=\frac{1}{2}\left\{\frac{3-4i}{5}\left(\frac{4+3i}{5}\right)^{n-1}+\frac{3+4i}{5}\left(\frac{4-3i}{5}\right)^{n-1}\right\}$$

において，$\dfrac{3-4i}{5}=\dfrac{4+3i}{5}(-i)$，

$\dfrac{3+4i}{5}=\dfrac{4-3i}{5}i$ であることから，

$$\alpha_n=\frac{i}{2}\left\{\left(\frac{4-3i}{5}\right)^{n}-\left(\frac{4+3i}{5}\right)^{n}\right\}$$

である。したがって，

$$\alpha_n=\frac{i}{2}\left\{\left(\frac{4-3i}{5}\right)^{n}-\left(\frac{4+3i}{5}\right)^{n}\right\}$$
$$\beta_n=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{4-3i}{5}\right)^{n}+\left(\frac{4+3i}{5}\right)^{n}\right\}$$

である。また，①^2＋②^2 より，

$$\begin{aligned}{\alpha_{n+1}}^2+{\beta_{n+1}}^2&=\left(\frac{4}{5}\alpha_n+\frac{3}{5}\beta_n\right)^2+\left(-\frac{3}{5}\alpha_n+\frac{4}{5}\beta_n\right)^2\\&={\alpha_n}^2+{\beta_n}^2\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}&{\alpha_n}^2+{\beta_n}^2={\alpha_{n-1}}^2+{\beta_{n-1}}^2={\alpha_{n-2}}^2+{\beta_{n-2}}^2=\cdots\\&\qquad\cdots={\alpha_1}^2+{\beta_1}^2=\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1\end{aligned}$$

よって，α_n，β_n には ${\alpha_n}^2+{\beta_n}^2=1\ (n\in N)$ という関係が成り立っている。

したがって，

$$\left[\frac{i}{2}\left\{\left(\frac{4-3i}{5}\right)^{n}-\left(\frac{4+3i}{5}\right)^{n}\right\}\right]^2+\left[\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{4-3i}{5}\right)^{n}+\left(\frac{4+3i}{5}\right)^{n}\right\}\right]^2=1$$

つまり，

$$\left[\frac{i}{2}\{(4-3i)^n-(4+3i)^n\}\right]^2$$
$$+\left[\frac{1}{2}\{(4-3i)^n+(4+3i)^n\}\right]^2=(5^n)^2$$

である。ここで，

$$A_n=\frac{i}{2}\{(4-3i)^n-(4+3i)^n\}$$
$$B_n=\frac{1}{2}\{(4-3i)^n+(4+3i)^n\}$$

とおき，A_n，B_n が整数であることを示す。

二項定理より

$$(4+3i)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_r4^{n-k}(3i)^k=N+Mi$$
（N，M は整数）

と表せるので，

$$(4-3i)^n=\overline{(4+3i)^n}=N-Mi$$

よって，

$$A_n=\frac{i}{2}\{(4-3i)^n-(4+3i)^n\}$$
$$=\frac{i}{2}\{(N-Mi)-(N+Mi)\}$$
$$=\frac{i}{2}\cdot(-2Mi)=M$$
$$B_n=\frac{1}{2}\{(4-3i)^n+(4+3i)^n\}$$
$$=\frac{1}{2}\{(N-Mi)+(N+Mi)\}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot2N=N$$

したがって，A_n，B_n は（0以外の）整数である。
すると，$|A_n|$，$|B_n|$ は自然数であり，

$$|A_n|^2+|B_n|^2=5^n$$

を満たす。
ここで，改めて $a_n=|A_n|$，$b_n=|B_n|$ とおくと，
a_n，$b_n\in N$ で，$a_n{}^2+b_n{}^2=(5^n)^2$ を満たす。

さて，A君は課題研究の時間以外でも個人的に研究を進めていて，n を自然数として

$$\left|\frac{i}{2}\{(4-3i)^n-(4+3i)^n\}\right|,$$
$$\left|\frac{1}{2}\{(4-3i)^n+(4+3i)^n\}\right|,\ 5^n\cdots(*)$$

がピタゴラス数であることを得ていた。なお，ここで｜　｜記号はその中にある数が（確認したように）整数であるから，実数の絶対値であるが，虚数単位 i が見受けられるので複素数の絶対値としても問題はない。よって，

$$\left|\frac{i}{2}\{(4-3i)^n-(4+3i)^n\}\right|$$
$$=\left|\frac{i}{2}\right||(4-3i)^n-(4+3)^n|$$
$$=\frac{1}{2}|(4-3i)^n-(4+3i)^n|$$

であり，結局

$$\frac{|(4+3i)^n-(4-3i)^n|}{2},$$
$$\frac{|(4+3i)^n+(4-3i)^n|}{2},\ 5^n\cdots(**)$$

と表せて，この方がすっきりしている。

しかし，今年度の本校理数科2年次生は9月から数学Ⅲの教科書に入り，数学Ⅱ（理数数学Ⅱ）の授業で「平面上の曲線」，「複素数平面」を飛ばして「関数と極限」「微分」…と進むことになり，「複素数平面」は数学Bが終了した時点で数学Bの授業で扱うこととしたためこのような変形までは要求しなかった。

したがって（$*$）がピタゴラス数3，4，5に三角関数の加法定理を用いて得られたピタゴラス数ということになる。

次に，3，4，5の次に簡単であるピタゴラス数5，12，13についても同様にして

$$\left|\frac{i}{2}\{(12-5i)^n-(12+5i)^n\}\right|,$$
$$\left|\frac{1}{2}\{(12-5i)^n+(12+5i)^n\}\right|,\ 13^n$$

がピタゴラス数であることを求めさせ，さらに一般に a，b，c がピタゴラス数のとき三角関数の加法定理を用いて同様のことをやってみるように指示したところ，A君がすでに研究して結果を得ていると言ったので，驚くと同時にA君に班員へ説明するように指示した。

結果を注意深く見れば，a，b，c がピタゴラス数のとき（$*$）の形で言えば，

$$\left|\frac{i}{2}\{(b-ai)^n-(b+ai)^n\}\right|,\ \left|\frac{1}{2}\{(b-ai)^n+(b+ai)^n\}\right|,\ c^n$$

（$**$）の形で言えば，

$$\frac{|(b+ai)^n-(b-ai)^n|}{2},\ \frac{|(b+ai)^n+(b-ai)^n|}{2},\ c^n$$

がピタゴラス数となる。

さらには，$|i^n|=|i|^n=1$ であることから，

$$\frac{|(b+ai)^n\pm(b-ai)^n|}{2}$$
$$=\frac{|i^n||(b+ai)^n\pm(b-ai)^n|}{2}$$
$$=\frac{|i^n\{(b+ai)^n\pm(b-ai)^n\}|}{2}$$
$$=\frac{|\{i(b+ai)\}^n\pm\{i(b-ai)\}^n|}{2}$$
$$=\frac{|(-a+bi)^n\pm(a+bi)^n|}{2}$$
$$=\frac{|(a+bi)^n\pm(-a+bi)^n|}{2}$$
$$=\begin{cases}\dfrac{|(a+bi)^n\mp(a-bi)^n|}{2} & (n\text{ は奇数})\\[2ex] \dfrac{|(a+bi)^n\pm(a-bi)^n|}{2} & (n\text{ は偶数})\end{cases}\quad(\text{複合同順})$$
$$=\frac{|(a+bi)^n\pm(a-bi)^n|}{2}$$

であり，a，b，c がピタゴラス数のとき

$$\frac{|(a+bi)^n-(a-bi)^n|}{2},\ \frac{|(a+bi)^n+(a-bi)^n|}{2},\ c^n$$

（n は自然数）はピタゴラス数である。

これはきれいな結果であり，本来ならばここまで導かせてみたかったが，やめておいた。

そこで，ピタゴラス数3，4，5からの自明なピタゴラス数（$3n$，$4n$，$5n$）と三角関数の加法定理を利用して得られた3，4，5からのピタゴラス数

$$\left(\left|\frac{i}{2}\{(4-3i)^n-(4+3i)^n\}\right|,\ \left|\frac{1}{2}\{(4-3i)^n+(4+3i)^n\}\right|,\ 5^n\right)$$

で一致する組はあるのか，ないのであればその証明を考えるとか，自明なピタゴラス数における最大数以外の和 $3\cdot5^{n-1}+4\cdot5^{n-1}$ と加法定理から得られたピタゴラス数の最大数以外の和

$$\left|\frac{i}{2}\{(4-3i)^n-(4+3i)^n\}\right|+\left|\frac{1}{2}\{(4-3i)^n+(4+3i)^n\}\right|$$

の大小関係について調べてみるように助言した。

また，他にも調べてみたいことがあればやるように指示した。

前方B班「折り返し数列の一般項」後方A班

4．研究第3日

2週間後の10月2日（木）3・4限に実施した。課題研究「三角関数の加法定理とピタゴラス数」について，これまでの研究成果と今後の研究についての方向性を確認させた。次のとおりである。

❶もっとも簡単なピタゴラス数3，4，5と三角関数の加法定理から，自明ではないピタゴラス数を作り出す数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の一般項を求める。（ここで言う「自明なピタゴラス数」とは $3n$，$4n$，$5n$（n は自然数）のことである）

❷一般のピタゴラス数に対し三角関数の加法定理を使って自明ではないピタゴラス数を作り出す数列の一般項を求める。

③もっとも簡単なピタゴラス数3，4，5から得られる自明なピタゴラス数 $3\cdot5^{n-1}$，$4\cdot5^{n-1}$，$5\cdot5^{n-1}(=5^n)$ と三角関数の加法定理を使って求められたピタゴラス数 a_n，b_n，c_n（$=5^n$）は一致することがあるのかについて調べる。

④もっとも簡単なピタゴラス数3，4，5から得られる自明なピタゴラス数 $3\cdot5^{n-1}$，$4\cdot5^{n-1}$，$5\cdot5^{n-1}$ と三角関数の加法定理を使って求められたピタゴラス数 a_n，b_n，c_n について
$3\cdot5^{n-1}+4\cdot5^{n-1}$（$(3\cdot5^{n-1})^2+(4\cdot5^{n-1})^2=(5^n)^2$）
と a_n+b_n（$a_n{}^2+b_n{}^2=c_n{}^2=(5^n)^2$）の大小について調べる。

⑤２つの平方数の和として２通り以上の表し方がある平方数について調べる。

⑥原始ピタゴラス数3，4，5や5，12，13などの原始ピタゴラス数を作り出す数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の一般項を三角関数の加法定理を使って求める。（「原始ピタゴラス数」とは最大公約数が１であるピタゴラス数のことを指す。）

⑦⑥で求めたピタゴラス数 a_n，b_n，c_n と三角関数の加法定理から作り出すピタゴラス数には⑥で求めたピタゴラス数 a_n，b_n，c_n が作り出すピタゴラス数以外のピタゴラス数があるのかについて調べる。⑥で求めたピタゴラス数 a_n，b_n，c_n はすべての原始ピタゴラス数を表しているのかを調べる。

９月18日（木）現在の進捗状況：❶と❷は完了。これからは，③④⑤を省略して⑥⑦をするのか？新しいことに着目して研究するのか？

さて，③についてはＡ君が自主的に研究を進めていたのでＡ君の成果を班員が聞くことにした。

Ａ君の話の概要

もっとも簡単な原始ピタゴラス数3，4，5から得られる自明なピタゴラス数である $3\cdot5^{n-1}$，$4\cdot5^{n-1}$，$5\cdot5^{n-1}(=5^n)$ と三角関数の加法定理を使って求められたピタゴラス数 a_n，b_n，$c_n\,(=5^n)$ は $n\geqq2$ のとき一致することがあるのかについて調べてみた。

いくつか調べてみると一致しない。そこで一致しないことを確認しようと決めた。その方針は5で割ったときの余りに着目するということである。$n\geqq2$ のとき自明なピタゴラス数はすべて5で割ると余りが0である。a_n，b_n，$c_n\,(=5^n)$ については5で割ったときの余りがあり（割り切れず），それは周期性をもち，ループ状態になるので自明なピタゴラス数 $3\cdot5^{n-1}$，$4\cdot5^{n-1}$，$5\cdot5^{n-1}(=5^n)$ に一致することはない。

さらに，原始ピタゴラス数5，12，13から得られる自明なピタゴラス数 $5\cdot13^{n-1}$，$12\cdot13^{n-1}$，$13\cdot13^{n-1}(=13^n)$ と三角関数の加法定理を使って求められたピタゴラス数 a_n，b_n，$c_n\,(=13^n)$ についても13で割ったときの余りに着目して同様の議論で一致することがないことを確認した。

しかし，一般に a，b，c が原始ピタゴラス数のときについては証明できていない。

ここまでの話から指導者が計画したように事が運んでいることにほくそ笑みながら，すべてのピタゴラス数を作り出す式を考えるように助言した。

実は，数日前の数学Ⅲの授業（平面上の曲線：媒介変数表示）で，$\tan\dfrac{\theta}{2}=t$ のとき，

$$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$$

であることを指導しており，そこで $t=\dfrac{n}{m}$ （m，n は互いに素で，$m>n$）とすることで「ピタゴラス数を表す m，n の式」を求めるように助言した。

本来，これは数学Ⅱの三角関数でできることであるが，「定点を通る直線による円の媒介変数表示」として扱ってある。これを説明しながら，これは「課題研究で使える」と思った。また，授業で学習したことが即，活かせることは生徒にとっても印象的なことであろう。（クラスで共有したい）

さて，三角関数の基本性質 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ から $\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+\left(\dfrac{2t}{1+t^2}\right)^2=1$ つまり

$$\left\{\frac{1-\left(\dfrac{n}{m}\right)^2}{1+\left(\dfrac{n}{m}\right)^2}\right\}^2+\left\{\frac{2\cdot\dfrac{n}{m}}{1+\left(\dfrac{n}{m}\right)^2}\right\}^2=1$$

である。これを整理して

$$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2$$

を得るから，m^2-n^2，$2mn$，m^2+n^2 がピタゴラス数であるといえる。

しかし，これでは「三角関数の加法定理」を使ってピタゴラス数を研究するというスタンスに反するので，$\tan\dfrac{\theta}{2}=t$ のとき，

$$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$$

であることを２倍角の公式（これは元をただせば加法定理による）を使って導くように言うと，即座に次のように簡単に片づけた。

$$\cos\theta=\cos\left(2\cdot\frac{\theta}{2}\right)=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\quad\cdots\cdots①$$

$$\sin\theta=\sin\left(2\cdot\frac{\theta}{2}\right)=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\quad\cdots\cdots②$$

また，三角関数の相互関係より

$\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\cos\dfrac{\theta}{2}}$ であるから，

$$\sin\frac{\theta}{2}=\tan\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\quad\cdots\cdots③$$

また，三角関数の相互関係より

$1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}$ であるから，

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}\quad\cdots\cdots④$$

①に④を代入して，

$$\cos\theta=\cos\left(2\cdot\frac{\theta}{2}\right)=2\cdot\frac{1}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}-1$$

$$=\frac{2-\left(1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=\frac{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$$

②に③を代入して，

$$\sin\theta=\sin\left(2\cdot\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=2\tan\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$=2\tan\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\quad\cdots\cdots⑤$$

⑤に④を代入して，

$$\sin\theta=2\tan\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$=2\tan\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=\frac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$$

したがって，

$$\cos\theta=\frac{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}},\quad \sin\theta=\frac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$$

である。ここで，$t=\tan\dfrac{\theta}{2}$ とおくと，

$$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$$

である。

ここで，３つの自然数 a，b，c が，$a^2+b^2=c^2$，a，b，c の最大公約数が１であるとき，これを原始ピタゴラス数と呼ぶことを教え，原始ピタゴラス数をすべてもれなく表せる式を見つけることを課した。m，n が奇数のとき，m^2，n^2 も奇数であることから，m^2-n^2，m^2+n^2 は偶数であり，$2mn$ も偶数であることから，このとき m^2-n^2，$2mn$，m^2+n^2 の最大公約数は２以上になり，原始ピタゴラス数ではない。

そこで，$\dfrac{m^2-n^2}{2}$，mn，$\dfrac{m^2+n^2}{2}$ を考え，これらが原始ピタゴラス数をすべて表すことを考えさせた。つまり，任意の原始ピタゴラス数 a，b，c（c が最大）が，互いに素で $m>n$，m，n は奇数である自然数 m，n を用いて，

$$a=\frac{m^2-n^2}{2},\quad b=mn,\quad c=\frac{m^2+n^2}{2}$$

と表せることを考えさせたわけである。

その証明の方向性は，奇数，偶数という基準で考えることであり，その基準で a，b，c にはどのような関係があるかを調べさせた。その際には合同式を使ってみるように指示した。

① $a\equiv 0 \pmod 2$，$b\equiv 0 \pmod 2 \Longrightarrow a^2+b^2\equiv 0 \pmod 2$
② $a\equiv 0 \pmod 2$，$b\equiv 1 \pmod 2 \Longrightarrow a^2+b^2\equiv 1 \pmod 2$
③ $a\equiv 1 \pmod 2$，$b\equiv 0 \pmod 2 \Longrightarrow a^2+b^2\equiv 1 \pmod 2$
④ $a\equiv 1 \pmod 2$，$b\equiv 1 \pmod 2 \Longrightarrow a^2+b^2\equiv 0 \pmod 2$

であるが，a^2+b^2 においては mod4 で考えるように指示した。すると，次のことを得る。

① $a\equiv 0 \pmod 2$，$b\equiv 0 \pmod 2 \Longrightarrow a^2+b^2\equiv 0 \pmod 4$
② $a\equiv 0 \pmod 2$，$b\equiv 1 \pmod 2 \Longrightarrow a^2+b^2\equiv 1 \pmod 4$
③ $a\equiv 1 \pmod 2$，$b\equiv 0 \pmod 2 \Longrightarrow a^2+b^2\equiv 1 \pmod 4$
④ $a\equiv 1 \pmod 2$，$b\equiv 1 \pmod 2 \Longrightarrow a^2+b^2\equiv 2 \pmod 4$

また，$c^2\equiv 0,\ 1 \pmod 4$ であることから④の場合はないこと，①のときは $c^2\equiv 0 \pmod 4$ となり $c\equiv 0 \pmod 2$ であるから a，b，c はすべて偶数となり，最大公約数が 1 であることに反し，①の場合もないことがわかる。

すると，②と③の場合が残るが，このとき $c^2=a^2+b^2\equiv 1 \pmod 4$ であるから，c は奇数である。②のとき，$b^2\equiv 1 \pmod 2$ であるから b^2 は奇数であり，$b^2=c^2-a^2=(c+a)(c-a)$ より $c\pm a$ は奇数である。したがって，$c+a$，$c-a$ が共通素因数 p をもつとすると，p は奇素数である。

このとき，$c+a=pq$，$c-a=pr\,(q>r)$ と表せるから，$a=p\cdot\dfrac{q-r}{2}$，$c=p\cdot\dfrac{q+r}{2}$ である。

また，$2a=p(q-r)$，$2c=p(q+r)$ であり，p と 2 は互いに素であるから，$q\pm r$ は 2 の倍数である。これより，a と c は p を共通素因数としてもつ。

このとき

$$b^2=c^2-a^2=(c+a)(c-a)=p^2\,\frac{q+r}{2}\cdot\frac{q-r}{2}$$

であるから，b は p を素因数としてもつ。すると，a，b，c は p を素因数としてもつことになり，最大公約数は $p\,(\geqq 3)$ 以上となって，最大公約数が 1 であることに反する。よって，$c+a$，$c-a$ は共通の奇素数素因数はもたない。これより，$c+a$，$c-a$ をそれぞれ素因数分解すると

$$c+a=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_k^{e_k}$$

$(p_i(i=1,\ 2,\ \cdots k)$ は奇素数，$e_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ は自然数$)$

$$c-a=q_1^{f_1}q_2^{f_2}\cdots q_l^{f_l}$$

$(q_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$ は奇素数，$f_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$ は自然数$)$
$p_i\neq q_j\,(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k\,;\,j=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$ と表せる。

すると，$b^2=c^2-a^2=(c+a)(c-a)$ より，
$b^2=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_k^{e_k}q_1^{f_1}q_2^{f_2}\cdots q_l^{f_l}$ となるが，素因数分解の一意性から，

$$b=p_1^{e_1'}p_2^{e_2'}\cdots p_k^{e_k'}q_1^{f_1'}q_2^{f_2'}\cdots q_l^{f_l'},$$

$e_i=2e_i'$，$f_j=2f_j'\,(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k\,;\,j=1,\ 2,\ \cdots l)$
である。したがって

$$c+a=p_1^{2e_1'}p_2^{2e_2'}\cdots p_k^{2e_k'}=\left(p_1^{e_1'}p_2^{e_2'}\cdots p_k^{e_k'}\right)^2$$
$$c-a=q_1^{2f_1'}q_2^{2f_2'}\cdots q_l^{2f_l'}=\left(q_1^{f_1'}q_2^{f_2'}\cdots q_l^{f_l'}\right)^2$$

である。ここで，

$$m=p_1^{e_1'}p_2^{e_2'}\cdots p_k^{e_k'},\quad n=q_1^{f_1'}q_2^{f_2'}\cdots q_l^{f_l'}$$

とおくと，$p_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$，$q_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$ は奇素数であるから，m，n はともに奇数であって，$c+a=m^2$，$c-a=n^2$ である。

よって，$a=\dfrac{m^2-n^2}{2}$，$c=\dfrac{m^2+n^2}{2}$

である。
また，

$$b^2=c^2-a^2=(c+a)(c-a)=m^2n^2=(mn)^2$$

であり，b，m，n は自然数であるから，$b=mn$ である。つまり，

$$a=\frac{m^2-n^2}{2},\quad b=mn,\quad c=\frac{m^2+n^2}{2}$$

である。

③の場合は，②の場合における a を b に置き換えて議論すればよいので，同様にして

$$a=mn,\quad b=\frac{m^2-n^2}{2},\quad c=\frac{m^2+n^2}{2}$$

（ただし，m，n は奇数で互いに素で $m>n$）

これより，すべての原始ピタゴラス数は，ともに奇数，互いに素，$m>n$ である自然数 m，n を用いて $\dfrac{m^2-n^2}{2}$，mn，$\dfrac{m^2+n^2}{2}$ と表せる。

さすがにこのようなことがすらすらとは出来かねるので助言をしながら到達した。

これから，
①元となる原始ピタゴラス数 a，b，c はどのようにすれば求められるのか。
②原始ピタゴラス a，b，c から作られるピタゴラス数 $|\mathrm{Re}(a+bi)^n|$，$|\mathrm{Im}(a+bi)^n|$，c^n は①にはない原始ピタゴラス数を作ることがあるのか。
③原始ピタゴラス数をすべて求められる式はあるのか。
①，③の解答は，ともに奇数で，互いに素で，$m>n$ である自然数 m，n を用いて，

$$\frac{m^2-n^2}{2},\quad mn,\quad \frac{m^2+n^2}{2}$$

で原始ピタゴラス数になり，しかもすべての原始ピタゴラス数を表すことができる。
②の解答は，このことから原始ピタゴラス数 a，b，c から作られるピタゴラス数 $|\mathrm{Re}(a+bi)^n|$，$|\mathrm{Im}(a+bi)^n|$，c^n は①にはない原始ピタゴラス数を作ることはないということである。

次の研究として，プログラムを組んで原始ピタゴラス数や 1 組のピタゴラス数 a，b，c から作られるピタゴラス数 $|\mathrm{Re}(a+bi)^n|$，$|\mathrm{Im}(a+bi)^n|$，c^n を打ち出してみたらどうかという提案をしたところ，A 君から B 君が得意であると聞き，B 君を中心にしてやってもらうことにした。

5．まとめ

課題研究の実質日数（6 日間）の半分を使ってここまでの結果を得ている。まだ，十分に理解しきれていない班員もいるので，理解している生徒に説明させたい。説明をすれば説明をする方もより理解が深まるからである。

発表は全員で行うが，パワーポイントや数式ソフトを使って作成し，時間内（昨年度は 7 分間）に収まるようなプレゼンテーションを行わなければならない。

生徒は情報の授業でパワーポイントを使うことに習熟しているようで，昨年度の発表会ではほぼ時間どおりにうまく作成されたプレゼンテーションを行っていた。研究内容はもちろんのことプレゼンテーションにも十分な準備をさせたい。機会があれば，発表会のようすを報告したいと思う。

複素数平面の効果的指導について（その2）

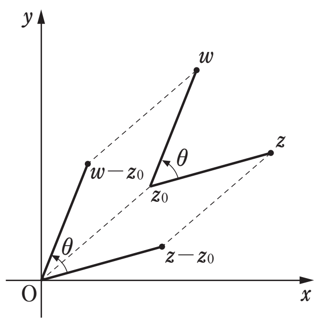
Focus Gold・Focus Z
編集委員
豊田 敏盟
Toshiaki Toyoda

本号では，点の回転移動における複素数の有用性，複素数平面の特性を生かした垂心の軌跡の解析及び「パスカルの定理」の証明に触れたいと思います。

1．点の回転移動に関する複素数の有用性

点 z を点 z_0 のまわりに θ だけ回転した点を ω とすると，

$$\omega-z_0=(\cos\theta+i\sin\theta)(z-z_0)$$

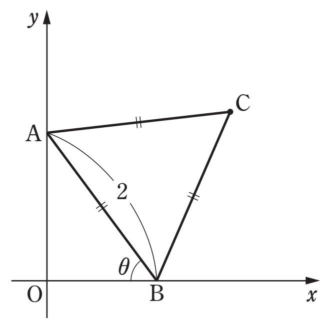


学習指導要領から行列が外れた現在，この複素数の積の図形的特性は，点や座標軸の回転，2直線のなす角，軌跡の解析などにおいて活用の幅が広がっています。

【問題1】

次の図のように，1辺の長さが2の正三角形ABCがあり，頂点Aは y 軸上を，頂点Bは x 軸上を動く。

$\angle\mathrm{ABO}=\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$，頂点Cの座標を $(x,\ y)$ として，次の問いに答えよ。



(1) x，y を θ の式で表せ。

(2) 頂点Cの軌跡を x，y の方程式で表し，その図形を描け。

【解説と解答】

数学Ⅱ「図形と方程式」の問題のように見受けられますが，そのつもりで解法に取り組むと厄介です。つまり，$\mathrm{A}(0,\ 2\sin\theta)$，$\mathrm{B}(2\cos\theta,\ 0)$，$\mathrm{AC}^2=\mathrm{BC}^2=4$ から

$$x^2+(y-2\sin\theta)^2=4,\ (x-2\cos\theta)^2+y^2=4$$

を導いて，媒介変数 θ を消去し，x，y の方程式をつくることになり，同値関係を気遣いながらの式変形は容易ではありません。

一方，直交座標平面に複素数平面を重ね，複素数の回転移動の考え方を生かすと解析が容易になります。

(1) の解答

複素数平面上で頂点A(α)，頂点B(β) を示す複素数は $\alpha=2i\sin\theta$，$\beta=2\cos\theta$ である。点A(α) を点B(β) のまわりに $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転すると頂点C(z) と一致するから，

$$z=\beta+(\alpha-\beta)\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$
$$=2\cos\theta+(2i\sin\theta-2\cos\theta)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta+i(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)$$

点Cを示す複素数 z は $z=x+yi$（x，y は実数）であるから，

$$x+yi=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta+i(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)$$

より，

$$x=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta,\ y=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta\cdots\cdots①$$

ここで，

$$x=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right),$$

$$y=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

で，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より，

$$\frac{\pi}{6}\leqq\theta+\frac{\pi}{6}\leqq\frac{2}{3}\pi,\quad \frac{\pi}{3}\leqq\theta+\frac{\pi}{3}\leqq\frac{5}{6}\pi$$

よって，$1\leqq x\leqq2$，$1\leqq y\leqq2$

(2) の解答

①から $\sin\theta$，$\cos\theta$ を x，y で表すと

$$\sin\theta=\frac{1}{2}(\sqrt{3}x-y),\ \cos\theta=\frac{1}{2}(-x+\sqrt{3}y)$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入し，整理すると，

$$x^2-\sqrt{3}xy+y^2=1\cdots\cdots②$$

（ただし，$1\leqq x\leqq2$，$1\leqq y\leqq2$）

を得る。

これが頂点Cの直交座標平面上の軌跡の式である。

（②を複素数平面の式で表すには，$z=x+yi$，$\bar{z}=x-yi$ から $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$，$y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ を求め，$x^2-\sqrt{3}xy+y^2=1$ に代入すればよい）

次に，②の2次曲線 $x^2-\sqrt{3}xy+y^2=1$ の概形を図形の回転により考える。

曲線②上の点P$(x,\ y)$ を原点のまわりに δ だけ回転して移る点をQ$(X,\ Y)$ とする。

つまり，点Q$(X,\ Y)$ を原点のまわりに $-\delta$ だけ回転したとき，点P$(x,\ y)$ に移るとすると，

$$x+yi=(X+Yi)\{\cos(-\delta)+i\sin(-\delta)\}$$
$$=(X\cos\delta+Y\sin\delta)+(-X\sin\delta+Y\cos\delta)i$$

よって，$x=X\cos\delta+Y\sin\delta$，

$y=-X\sin\delta+Y\cos\delta$

を得る。

この x，y を②に代入して整理すると，

$$(1+\sqrt{3}\sin\delta\cos\delta)X^2-\sqrt{3}\cos2\delta XY+(1-\sqrt{3}\sin\delta\cos\delta)Y^2=1$$

ここで，XY の係数 $-\sqrt{3}\cos2\delta=0$ とすると，

$$\delta=\frac{\pi}{4}$$

このとき，

$$(2+\sqrt{3})X^2+(2-\sqrt{3})Y^2=2\ （楕円）\cdots\cdots③$$

となる。

ここで，$\delta=\dfrac{\pi}{4}$ より，

$$x=X\cos\delta+Y\sin\delta=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)$$

$$y=-X\sin\delta+Y\cos\delta=\frac{1}{\sqrt{2}}(-X+Y)$$

そして，$1\leqq x\leqq2$，$1\leqq y\leqq2$ であるから，

$$\sqrt{2}\leqq X+Y\leqq2\sqrt{2},\ \sqrt{2}\leqq-X+Y\leqq2\sqrt{2}$$

以上から，求める軌跡は，座標軸を原点のまわりに $-\dfrac{\pi}{4}$ 回転したとき，

楕円 $(2+\sqrt{3})x^2+(2-\sqrt{3})y^2=2$

の一部（$\sqrt{2}\leqq x+y\leqq2\sqrt{2}$，$\sqrt{2}\leqq-x+y\leqq2\sqrt{2}$）である。

2．複素数平面の特性を生かした垂心の軌跡の解析

三角形の垂心の軌跡を求める次の問題の解答を，幾何と複素数平面の双方で行いますので，複素数平面の有用性を知っていただきたいと思います。

【問題2】

円Oに内接する△ABC$\left(ただし，\angle\mathrm{A}\fallingdotseq\dfrac{\pi}{2}\right)$について，辺BCを固定し，頂点Aを円Oの周上を動かすとき，△ABCの垂心Hの軌跡を求めよ。

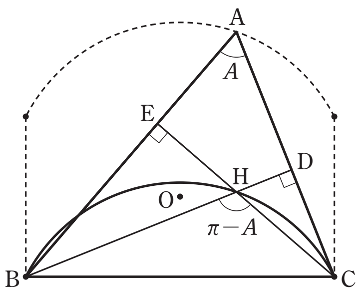
【幾何での解答】

頂点B，Cから対辺に降ろした垂線の足をD，E，△ABCの垂心をHとする。

(i) $0<A<\frac{\pi}{2}$，$0<B$，$C\leqq\frac{\pi}{2}$ の場合

4点A，E，H，Dはこの順に同一円周上にある。

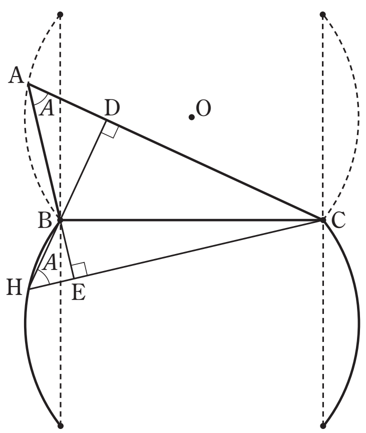
∠BHC$=\pi-A$（一定）より，垂心Hの軌跡は，弦BCに関して円Oの小弧BCと対称な弧である。



(ii) $0<A<\frac{\pi}{2}$ で，$\frac{\pi}{2}<B<\pi$ または $\frac{\pi}{2}<C<\pi$ の場合

4点A，H，E，Dはこの順に同一円周上にある。

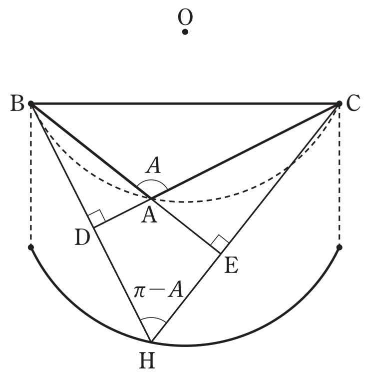
∠BHC=∠BAC$=A$（一定）より，垂心Hの軌跡は，∠Bまたは∠Cが鈍角となるように頂点Aが動く範囲の円Oの小弧を，直線BCに関して対称に移した弧である。ただし，点B，Cを除く。



(iii) $\frac{\pi}{2}<A<\pi$ の場合

4点A，E，H，Dはこの順に同一円周上にある。

∠BHC$=\pi-A$ で $0<\pi-A<\frac{\pi}{2}$ より，垂心Hの軌跡は，(i)の場合の頂点Aが動く図形を辺BCに関して対称に移動した図形と同じである。



以上をまとめると，△ABCの垂心Hは，△ABCの外接円の中心Oを辺BCに関して対称な点O′に移し，その点O′を中心とする円Oと同径の円周上を動く。

【複素数平面の特性を生かした解答】

△ABCは単位円（原点を中心，半径1の円）に内接するとしてこの問題を設定しても一般性は損なわれない。そこで，単位円周上の3点A(α)，B(β)，C(γ)を結ぶ△ABCの垂心H(z)の軌跡を考えてみる。

Focus Gold数学Ⅲの180ページ・例題73より，△ABCの垂心H(z)は $z=\alpha+\beta+\gamma$ と表せる。

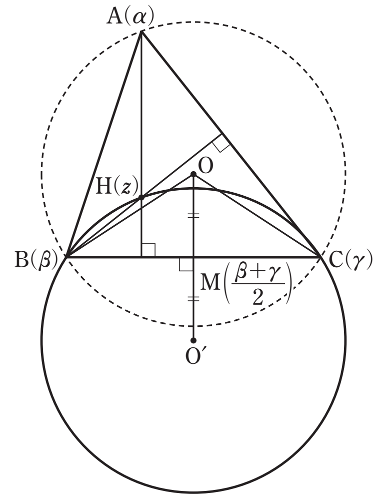
この式から，$\alpha=z-(\beta+\gamma)=z-2\cdot\frac{\beta+\gamma}{2}$ となる。また，$|\alpha|=1$ であるから，

$$\left|z-2\cdot\frac{\beta+\gamma}{2}\right|=1 \cdots\cdots ①$$

ここで，$\frac{\beta+\gamma}{2}$ は辺BCの中点Mを示し，OB=OCよりOM⊥BCが成り立つ。

よって，$2\cdot\frac{\beta+\gamma}{2}$ は辺BCに関する原点Oの対称点O′である。

したがって，①から，垂心Hはこの対称点O′を中心に，半径1の円周上を動く。



このように，幾何で解析するよりもスッキリと解答がまとまります。

さらに，三角形の垂心に関する面白い発展問題を紹介しましょう。

【発展問題】 円周上の4点のうちから3点をとって作った4つの三角形の垂心は，同一円周上にあることを証明せよ。

【解答】

「単位円周上の4点」としても一般性を損なわないので，複素数平面における単位円周上に4つの定点A(α_1)，B(α_2)，C(α_3)，D(α_4)を定める。

まず，$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=z_0$ は定点を表す。

次に，4つの定点から3点A(α_1)，B(α_2)，C(α_3)を選び，△ABCをつくると，△ABCの垂心H(z_1)は $z_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ であるから，

$$z_1-z_0=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)=-\alpha_4$$

D(α_4)は単位円周上の点であるから，

$$|z_1-z_0|=|-\alpha_4|=|\alpha_4|=1$$

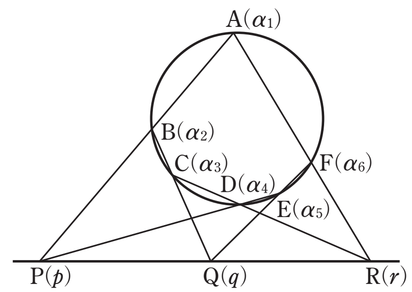
つまり，△ABCの垂心H(z_1)は定点z_0を中心とし，半径1の円周上にある。

同様に，他の異なる3点を選んでつくる三角形のどの垂心も定点z_0を中心とする半径1の円周上にある。

3．複素数平面の特性を生かした「パスカルの定理」の証明

次にパスカルの定理「円に内接する六角形の相対する辺の交点は一直線上にある」を証明してみましょう。この場合も，「単位円に内接する六角形」としても一般性は失いませんから，下の問題3に取り組みます。

【問題3】 複素数平面の単位円周上に，異なる6つの点A(α_1)，B(α_2)，C(α_3)，D(α_4)，E(α_5)，F(α_6)がこの順にある。直線ABとDEの交点をP(p)，直線BCとEFの交点をQ(q)，直線CDとFAの交点をR(r)とするとき，3点P，Q，Rは一直線上にあることを証明せよ。



【解答の準備】

(1) 異なる3点P，Q，Rが一直線上にあるための必要十分条件は，

$$\arg\frac{r-p}{q-p}=0,\ \pi \quad つまり，\quad \frac{r-p}{q-p}=(実数)$$

よって，$\frac{r-p}{q-p}=\overline{\left(\frac{r-p}{q-p}\right)}=\frac{\overline{r}-\overline{p}}{\overline{q}-\overline{p}}$ ……①

(2) 2点A(α_1)，B(α_2)を通る直線の方程式は，

$\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}=\frac{\overline{z}-\overline{\alpha_1}}{\overline{\alpha_2}-\overline{\alpha_1}}$ より，

$$(z-\alpha_1)(\overline{\alpha_2}-\overline{\alpha_1})=(\overline{z}-\overline{\alpha_1})(\alpha_2-\alpha_1)$$

点A(α_1)，B(α_2)は単位円周上の点より，

$|\alpha_1|^2=|\alpha_2|^2=1$ よって，$\overline{\alpha_1}=\frac{1}{\alpha_1}$，$\overline{\alpha_2}=\frac{1}{\alpha_2}$

これらを代入して整理すると，

$$(z+\alpha_1\alpha_2\overline{z}-\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)=0$$

$\alpha_1-\alpha_2(\neq0)$ で割って，

$$z+\alpha_1\alpha_2\overline{z}-\alpha_1-\alpha_2=0 \cdots\cdots ②$$

【略解】解答の準備（2）より，直線 AB の方程式は，$z+\alpha_1\alpha_2\overline{z}-\alpha_1-\alpha_2=0$ ……②

同様に，D(α_4)，E(α_5) を通る直線の方程式は，$z+\alpha_4\alpha_5\overline{z}-\alpha_4-\alpha_5=0$ ……③

連立方程式②，③を z と $\overline{z}$ について解くと，

$$z=\frac{(\alpha_1+\alpha_2)\alpha_4\alpha_5-(\alpha_4+\alpha_5)\alpha_1\alpha_2}{\alpha_4\alpha_5-\alpha_1\alpha_2},\quad \overline{z}=\frac{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4-\alpha_5}{\alpha_1\alpha_2-\alpha_4\alpha_5}$$

（$\alpha_1\alpha_2=\alpha_4\alpha_5$ のときは②，③が一致または平行となるから不適。つまり，$\alpha_1\alpha_2\fallingdotseq\alpha_4\alpha_5$）

これが直線 AB，DE の交点 P(p) であるから，

$$p=\frac{(\alpha_1+\alpha_2)\alpha_4\alpha_5-(\alpha_4+\alpha_5)\alpha_1\alpha_2}{\alpha_4\alpha_5-\alpha_1\alpha_2},\quad \overline{p}=\frac{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4-\alpha_5}{\alpha_1\alpha_2-\alpha_4\alpha_5}\ \cdots\cdots④$$

前記①の $\dfrac{r-p}{q-p}=\dfrac{\overline{r}-\overline{p}}{\overline{q}-\overline{p}}$ を証明するにあたって，p と $\overline{p}$ では $\overline{p}$ の方が文字数が少ないので $\overline{q}$，$\overline{r}$ を求め，右辺→左辺を導くことにする。$\overline{q}$ は④で $\alpha_1\to\alpha_2$，$\alpha_2\to\alpha_3$，$\alpha_4\to\alpha_5$，$\alpha_5\to\alpha_6$ と，$\overline{r}$ は④で $\alpha_1\to\alpha_3$，$\alpha_2\to\alpha_4$，$\alpha_4\to\alpha_6$，$\alpha_5\to\alpha_1$ と置き換えればよいから，

$$\overline{q}=\frac{\alpha_2+\alpha_3-\alpha_5-\alpha_6}{\alpha_2\alpha_3-\alpha_5\alpha_6}\ \cdots\cdots⑤,\quad \overline{r}=\frac{\alpha_3+\alpha_4-\alpha_6-\alpha_1}{\alpha_3\alpha_4-\alpha_6\alpha_1}\ \cdots\cdots⑥$$

①の右辺の分子 $\overline{r}-\overline{p}=\dfrac{\alpha_3+\alpha_4-\alpha_6-\alpha_1}{\alpha_3\alpha_4-\alpha_6\alpha_1}-\dfrac{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4-\alpha_5}{\alpha_1\alpha_2-\alpha_4\alpha_5}$

$$=\frac{(\alpha_3+\alpha_4-\alpha_6-\alpha_1)(\alpha_1\alpha_2-\alpha_4\alpha_5)-(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4-\alpha_5)(\alpha_3\alpha_4-\alpha_6\alpha_1)}{(\alpha_3\alpha_4-\alpha_6\alpha_1)(\alpha_1\alpha_2-\alpha_4\alpha_5)}$$

$$=\frac{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_4+\alpha_5\alpha_6-\alpha_2\alpha_3-\alpha_4\alpha_5-\alpha_6\alpha_1)}{(\alpha_3\alpha_4-\alpha_6\alpha_1)(\alpha_1\alpha_2-\alpha_4\alpha_5)}\ \cdots\cdots⑦$$

①の右辺の分母 $\overline{q}-\overline{p}=\dfrac{\alpha_2+\alpha_3-\alpha_5-\alpha_6}{\alpha_2\alpha_3-\alpha_5\alpha_6}-\dfrac{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4-\alpha_5}{\alpha_1\alpha_2-\alpha_4\alpha_5}$

$$=\frac{(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_5-\alpha_6)(\alpha_1\alpha_2-\alpha_4\alpha_5)-(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4-\alpha_5)(\alpha_2\alpha_3-\alpha_5\alpha_6)}{(\alpha_2\alpha_3-\alpha_5\alpha_6)(\alpha_1\alpha_2-\alpha_4\alpha_5)}$$

$$=\frac{(\alpha_2-\alpha_5)(\alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_4+\alpha_5\alpha_6-\alpha_2\alpha_3-\alpha_4\alpha_5-\alpha_6\alpha_1)}{(\alpha_2\alpha_3-\alpha_5\alpha_6)(\alpha_1\alpha_2-\alpha_4\alpha_5)}\ \cdots\cdots⑧$$

⑦，⑧より，①の右辺は

$$\frac{\overline{r}-\overline{p}}{\overline{q}-\overline{p}}=\frac{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_4+\alpha_5\alpha_6-\alpha_2\alpha_3-\alpha_4\alpha_5-\alpha_6\alpha_1)}{(\alpha_3\alpha_4-\alpha_6\alpha_1)(\alpha_1\alpha_2-\alpha_4\alpha_5)}$$

$$\div\frac{(\alpha_2-\alpha_5)(\alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_4+\alpha_5\alpha_6-\alpha_2\alpha_3-\alpha_4\alpha_5-\alpha_6\alpha_1)}{(\alpha_2\alpha_3-\alpha_5\alpha_6)(\alpha_1\alpha_2-\alpha_4\alpha_5)}=\frac{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_2\alpha_3-\alpha_5\alpha_6)}{(\alpha_2-\alpha_5)(\alpha_3\alpha_4-\alpha_6\alpha_1)}\ \cdots\cdots⑨$$

次に，$\dfrac{\overline{r}-\overline{p}}{\overline{q}-\overline{p}}$ の共役複素数 $\dfrac{r-p}{q-p}=\dfrac{(\overline{\alpha_4}-\overline{\alpha_1})(\overline{\alpha_2}\,\overline{\alpha_3}-\overline{\alpha_5}\,\overline{\alpha_6})}{(\overline{\alpha_2}-\overline{\alpha_5})(\overline{\alpha_3}\,\overline{\alpha_4}-\overline{\alpha_6}\,\overline{\alpha_1})}$

について，$|\alpha_i|^2=1$ から，$\overline{\alpha_i}=\dfrac{1}{\alpha_i}$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$ を代入して計算すると，

$$\frac{r-p}{q-p}=\frac{(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_5\alpha_6-\alpha_2\alpha_3)}{(\alpha_5-\alpha_2)(\alpha_6\alpha_1-\alpha_3\alpha_4)}=\frac{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_2\alpha_3-\alpha_5\alpha_6)}{(\alpha_2-\alpha_5)(\alpha_3\alpha_4-\alpha_6\alpha_1)}\ \cdots\cdots⑩$$

よって，⑨，⑩は一致するから，$\dfrac{r-p}{q-p}=\dfrac{\overline{r}-\overline{p}}{\overline{q}-\overline{p}}$ が成立する。

したがって，3 点 P(p)，Q(q)，R(r) は一直線上にあることが証明された。

パスカルの定理の証明はメネラウスの定理と方べきの定理を使っても証明できますが，複素数平面の基本的な性質や演算を駆使し，代数的な式変形で処理できるところが妙味といえます。

大学入試問題を考える

−2015年度 東京大学　理科系第5問−

岡山県立岡山朝日高等学校
教諭　山川 宏史

Q **m を 2015 以下の正の整数とする。${}_{2015}\mathrm{C}_m$ が偶数となる最小の m を求めよ。**

よくある解答

$${}_{2015}\mathrm{C}_m=\frac{2015\cdot2014\cdot2013\cdot\cdots\cdot(2016-m)}{m(m-1)(m-2)\cdot\cdots\cdot1}=\frac{2015}{1}\cdot\frac{2014}{2}\cdot\frac{2013}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{2016-m}{m}\quad\cdots\cdots①$$

31 以下の自然数 k に対して「k と $2016-k$ との素因数 2 の個数は同じ」……②を示す。

$k=2^ln$（l は 0 以上の整数，n は奇数）と unique に表される。$k\leqq31$ より $0\leqq l\leqq4$ である。

$2016-k=2^5\cdot63-2^ln=2^l(2^{5-l}\cdot63-n)$ であるが，$1\leqq5-l\leqq5$ より $2^{5-l}\cdot63-n$ は奇数である。

よって，$2016-k$ は素因数 2 の個数が l となり，②が示された。

これより，$1\leqq m\leqq31$ のとき，①の分母，分子それぞれの素因数 2 の個数が等しくなる。

したがって，①を約分したときに素因数 2 は残らないので，$1\leqq m\leqq31$ のとき ${}_{2015}\mathrm{C}_m$ は奇数である。

$${}_{2015}\mathrm{C}_{32}=\frac{2015}{1}\cdot\frac{2014}{2}\cdot\frac{2013}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{2016-31}{31}\cdot\frac{2016-32}{32}={}_{2015}\mathrm{C}_{31}\cdot\frac{2016-32}{32}=62\cdot{}_{2015}\mathrm{C}_{31}$$

であるから ${}_{2015}\mathrm{C}_{32}$ は偶数である。よって求める最小の m は 32 ……答

別解

求める m を M とする。${}_{2015}\mathrm{C}_0=1$ より，$M\geqq1$

$${}_{2015}\mathrm{C}_M=\frac{2015!}{M!(2015-M)!}=\frac{2015!}{(M-1)!\{2015-(M-1)\}!}\cdot\frac{2016-M}{M}$$

$$={}_{2015}\mathrm{C}_{M-1}\cdot\frac{2016-M}{M}={}_{2015}\mathrm{C}_{M-1}\cdot\frac{2016}{M}-{}_{2015}\mathrm{C}_{M-1}\quad\cdots\cdots③$$

M の最小性により，${}_{2015}\mathrm{C}_{M-1}$ は奇数である。左辺の ${}_{2015}\mathrm{C}_M$ が偶数であるから，右辺の ${}_{2015}\mathrm{C}_{M-1}\cdot\dfrac{2016}{M}$，${}_{2015}\mathrm{C}_{M-1}$ はともに奇数である。

よって，$\dfrac{2016}{M}$ を既約分数にすると，分母，分子ともに奇数である。(整数とは限らない)。

ここで，$2016=63\cdot2^5$ であるから，$M=32$……答

解説

M の最小性を用いたのがポイント。ちなみに，③を用いると，${}_{2015}\mathrm{C}_{33}$，・…・，${}_{2015}\mathrm{C}_{63}$ も偶数とわかる。${}_{2015}\mathrm{C}_{64}$ から奇数が続くこともわかる。

2016 の周辺の数値を探してみると，2016 は結構特殊な数値とわかる。もちろん，2048 はかなり特殊。

そこで，同様に考えると，次のように拡張できる。証明は背理法で容易。

Corollary　n を自然数，$0\leqq k\leqq2^n-1$ とするとき，${}_{2^n-1}\mathrm{C}_k$ は奇数である。

最後に，必要十分性が 1999 年東大前期理系第 5 問に出題。やはり，東大は過去問をする価値がある。

真の数学力が身につく

フォーカス・ゴールド
Focus Gold 新課程

A５判
3色刷

数学I＋A，数学II＋B
数学II，数学III

1. 『先に進める学習』と『基本も押さえる』に応えた「マスター編」
フォローアップ（進める学習）とフィードバック（振り返り学習）で入試に必要な学力が確実に身につきます。

2. 充実したコラム
数学への興味や知識の深まりなどが感じられる内容になっています。

入試に必要な「数学の本質」が確実に身につく

システム数学　入試必修問題集シリーズ

●河合塾の徹底した入試分析で良質の問題を厳選
●難関国公私立大学の入試に対応した『実戦』と国公私立大学の入試に対応した『練磨』の２シリーズ発刊
●入試に必要な重要問題で構成したテーマ別問題と，最近の傾向で学習できる総合演習問題の２部構成

実　戦	数学I･II･A･B	A5判	192頁／定価本体600円＋税 【解答（別冊）】A5判／276頁／定価本体476円＋税
実　戦	数学III	A5判	116頁／定価本体467円＋税 【解答（別冊）】A5判／180頁／定価本体495円＋税
練　磨	数学I･II･A･B	A5判	152頁／定価本体571円＋税 【解答（別冊）】A5判／168頁／定価本体286円＋税
練　磨	数学III	A5判	96頁／定価本体381円＋税 【解答（別冊）】A5判／100頁／定価本体238円＋税

理数教育の未来へ
啓林館
http://www.shinko-keirin.co.jp/

〒543-0052　大阪市天王寺区大道4-3-25　TEL.06-6779-1531　FAX.06-6779-5011
〒113-0023　東京都文京区向丘2-3-10　TEL.03-3814-2151　FAX.03-3814-2159
〒003-0005　札幌市白石区東札幌5条2-6-1　TEL.011-842-8595　FAX.011-842-8594
〒461-0004　名古屋市東区葵1-4-34 双栄ビル2F　TEL.052-935-2585　FAX.052-936-4541
〒732-0052　広島市東区光町1-7-11 広島CDビル5F　TEL.082-261-7246　FAX.082-261-5400
〒810-0022　福岡市中央区薬院1-5-6 ハイヒルズビル5F　TEL.092-725-6677　FAX.092-725-6680

20151001