啓林館 高校数学 教育情報誌

啓林館

Focus Gold 通信

フォーカスゴールド

[特集] p.2-14

難関大学への数学の学習法について

～2014 東大・京大入試問題を振り返って～

Focus Gold・Focus Up 編集委員　竹内英人

Rimse理事長賞研究作品の複素数平面による解析 p.15-18

Focus Gold・Focus Up 編集委員　豊田敏盟

生徒の素朴な疑問に答えるために⑤ ―私の数学質問ノートから― p.19

佐々木学園 鶯谷中学・高等学校 校長　小邑政明

vol.10

特集 難関大学への数学の学習法について ～2014東大・京大入試問題を振り返って～

Focus Gold・Focus Up 編集委員　竹内英人

入試が終わりました。現行課程の最終年度の入試ということで，どのような問題が出るか，新課程をにらんだ出題がどれだけあるか，など先生方にとっても非常に関心の高い入試だったと思います。私自身，本年度の入試を見渡して感じた特徴は，

① 理系における行列の出題は少なかった。

これは，各先生方や予備校などが現行課程の最終年度により，行列の出題率は高いであろうと予想した裏をかいてきたかなという印象です。やはり，先入観で分析するのは良くないですね。

② 東大をはじめとする難関大学の難易度が下がった。

昨年度の東大においては，5，6番とも難しすぎてほとんどの生徒が0点という問題でした。この反省を活かしてか東大はずいぶん易しくなりました。しかしながら，高校現場の先生方に聞くと，かなり大きく差がついたそうです。

特に本年度の特徴は，数学が得意な（普段の模試等なら絶対合格ラインにいる）生徒が数学で失敗したという報告を多く聞きました。今年の東大理系の問題は苦手な生徒でも（合わせ技で）2問，標準的な生徒なら3問は十分取れる問題でしたので，考えられる原因としては，数学が得意な生徒は，難しい問題に時間を掛けすぎ，標準問題で取りこぼしたという可能性が高いのかもしれません。もう一つ先生方がおっしゃっていたのは，「ほとんどの生徒が『いつも以上に書けた』といって喜んで帰ってきた。ところが，そういう生徒が軒並み失敗している」ということでした。昔から，生徒の「出来た，出来た」は当てにならないというのが，教員の常識ですが，今年は特にその傾向が強かったように思います。東大の先生方も，本年度のレベルで十分に学生の選別が出来ると分かったのではないでしょうか。ただ，来年以降もこの難易度が続くと安易には予想できません。

③ 新課程を意識した整数問題が出始めた

整数問題については，旧課程でも難関大学を始めとして普通に出題はされていましたが，今年，出題された整数問題を見比べてみると，新課程における「整数」を意識していると思われる問題が幾つかありました。その典型が東大の合同式と部屋割り論法（鳩ノ巣原理），名古屋大学の二進法，神戸大学のピタゴラス数（京大もこの変形バージョンですね）などが挙げられます。本年度出された整数問題をすべてチェックすることは，来年度以降の「整数問題」の傾向を知るために非常に重要だと思います。

では，ここからは東大，京大の入試問題を振り返りながら，その後，来年度の入試に向けてどのような指導を行っていく必要があるか考えてみたいと思います。なお，2013東大・京大入試問題の時に使用した「求められる6つの力」（詳細はFocus Gold通信vol.5をご参照下さい）について，今年もコメントしていきたいと思います。

【難関大学が求める6つの力】
① 問題文の意味を把握する力，イメージ（翻訳）する力
② 地道な計算を面倒がらずに，最後まで解ききる腕力，計算力
③ 具体的に手を動かす力
④ 実験して発見した結果を，答案へ反映していくための日本語能力
⑤ （初等）幾何の力
⑥ 「問題が解ける」というレベルから「問題を楽しむ」力

【2013年　東大　理　5番】

第　5　問

次の命題 P を証明したい。

命題 P　次の条件 (a)，(b) をともに満たす自然数（1 以上の整数）A が存在する。

(a)　A は連続する 3 つの自然数の積である。

(b)　A を 10 進法で表したとき，1 が連続して 99 回以上現れるところがある。

以下の問いに答えよ。

(1)　y を自然数とする。このとき不等式

$$x^3+3yx^2<(x+y-1)(x+y)(x+y+1)<x^3+(3y+1)x^2$$

が成り立つような正の実数 x の範囲を求めよ。

(2)　命題 P を証明せよ。

【2013年　東大　理　6番】

第　6　問

座標空間において，xy 平面内で不等式 $|x|\leqq 1$，$|y|\leqq 1$ により定まる正方形 S の 4 つの頂点を A$(-1,1,0)$，B$(1,1,0)$，C$(1,-1,0)$，D$(-1,-1,0)$ とする。正方形 S を，直線 BD を軸として回転させてできる立体を V_1，直線 AC を軸として回転させてできる立体を V_2 とする。

(1)　$0\leqq t<1$ を満たす実数 t に対し，平面 $x=t$ による V_1 の切り口の面積を求めよ。

(2)　V_1 と V_2 の共通部分の体積を求めよ。

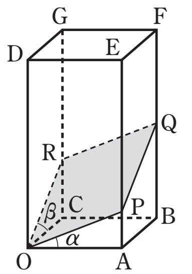
【2014 東京大学】（ ）内は予想平均点

理系［1］（三角関数，空間座標，ベクトル）
（13/20）（求められる力：①，⑤）

1 辺の長さが 1 の正方形を底面とする四角柱 OABC−DEFG を考える。3 点 P，Q，R を，それぞれ辺 AE，辺 BF，辺 CG 上に，4 点 O，P，Q，R が同一平面上にあるようにとる。四角形 OPQR の面積を S とおく。また，∠AOP を α，∠COR を β とおく。

(1) S を $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ を用いて表せ。

(2) $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，$S=\dfrac{7}{6}$ であるとき，$\tan\alpha+\tan\beta$ の値を求めよ。さらに，$\alpha\leqq\beta$ のとき，$\tan\alpha$ の値を求めよ。



出だしの問題としては手の付けやすい問題だったので，これで波にのれるかどうかの1問。直方体を斜めに切った図が示されているが，この図から O を原点とした空間座標がイメージできるかどうかが最初のポイント。ここさえ乗り切れば，あとは平行四辺形の面積公式

$$S=\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2|\overrightarrow{OR}|^2-(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR})^2}$$

を利用すれば終わり。

この問題のネタ元は，$\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{2}$ となる，α，β に対し，$\tan(\alpha+\beta)=1$，$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$ というもの。

新課程Focus Gold数学Ⅲp.208のColumnにもこの内容は載せてあります。要はColumnの図を直方体の側面に巻き付けた図となっているわけです。ちなみに，この問題は某予備校の高2の模試でほとんど同じ問題が出ているそうです。今年のサービス問題の1問と思いますが，生徒は意外と出来ていなかったようです。数式という観点で見れば東大お得意の「対称式」です。東大入試対策では対称式の扱いを十分にトレーニングしておく必要があります。

理系［2］（確率，数列，極限）（14/20）
（求められる力：①）

a を自然数（すなわち 1 以上の整数）の定数とする。

白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋 U に対して，次の操作（∗）を考える。

（∗）袋 U から球を 1 個取り出し，
（i）取り出した球が白球のときは，袋 U の中身が白球 a 個，赤球 1 個となるようにする。
（ii）取り出した球が赤球のときは，その球を袋 U へ戻すことなく，袋 U の中身はそのままにする。

はじめに袋 U の中に，白球が $a+2$ 個，赤球が 1 個入っているとする。この袋 U に対して操作（∗）を繰り返し行う。

たとえば，1 回目の操作で白球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個，赤球 1 個となり，さらに 2 回目の操作で赤球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個のみとなる。

n 回目に取り出した球が赤球である確率を p_n とする。ただし袋 U の中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする。

(1) p_1，p_2 を求めよ。

(2) $n\geqq3$ に対して p_n を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}p_n$ を求めよ。

昨年の「確率」に比べると大幅に易化。東大確率特有の「実験しながら規則をつかんでいく」というものではなく，単純な隣接二項間漸化式の問題でした。設定も非常に単純であるので漸化式も立てやすい。(3)の極限もとってつけたような問題で問題なし。本年度の一番易しい問題です。これを取りこぼした受験生の合格は難しいでしょう。

昨年の確率がかなり難しかったので，その反動による易化だと思われますが，それにしても難易度が下がりすぎ。ちなみに採点の立場でいえば，大きく差がつかない問題なので，(3)の無限等比級数の和を求める際に，|公比|<1 をきちんと示してあるかどうかで，点差を付けたであろうと思われます。細かいことであるが，日頃から注意して指導したいところです。

理系［3］（二次関数，積分）（12/20）
（求められる力：②，④）

u を実数とする。座標平面上の 2 つの放物線

$C_1：y=-x^2+1$

$C_2：y=(x-u)^2+u$

を考える。C_1 と C_2 が共有点をもつような u の値の範囲は，ある実数 a，b により，$a\leqq u\leqq b$ と表される。

(1) a，b の値を求めよ。

(2) u が $a\leqq u\leqq b$ をみたすとき，C_1 と C_2 の共有点を $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$ とする。ただし，共有点が 1 点のみのときは，P_1 と P_2 は一致し，ともにその共有点を表すとする。

$2|x_1y_2-x_2y_1|$

を u の式で表せ。

(3) (2)で得られる u の式を $f(u)$ とする。定積分

$$I=\int_a^b f(u)\,du$$

を求めよ。

(1)は簡単な2次方程式の実数解条件。(2)も計算するだけです。条件式から y_1，y_2 を消去して，x_1，x_2 だけで表せば，絶対値がついているので，実質，x_1，x_2 の対称式になります。その後，直接，解を代入するか，「解と係数の関係」でいくかに分かれると思いますが，いずれにしても大した計算ではないので，(2)までは解き切りたいところです。

(3)については，(2)で求めた答を

$$(u^2+u+1)\sqrt{-u^2-2u+2}$$
$$=(u^2+u+1)\sqrt{3-(u+1)^2}$$

と変形した後，$u+1=\sqrt{3}\sin\theta$ と置換する積分が出てきます。これは普段の授業ではなかなか習わない置換であり，問題集や参考書などで一度は経験していないと厳しいかもしれません。（ちなみにFocus Gold数学Ⅲでは，p.540のStep Upの【s21】で扱っています）「対称性重視の東大」としては，積分区間が $u=-1-\sqrt{3}$，$u=-1+\sqrt{3}$ という，$u=-1$ に関して対称より，$u+1=t$ という置換を自分で思いつけるかどうか（数式を見抜く能力）を問うているのかと考えます。この置換が出来れば，

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(t^2-t+1)\sqrt{3-t^2}\,dt$$

となり，以下，$t=\sqrt{3}\sin\theta$ と置くのは容易ですね。

なお，(2)の形から平行四辺形の面積を想像させられるが，これが(3)とどのように関係してくるのかは不明です。

理系［4］（不等式，数列，極限）（6/20）
（求められる力：①，②，④）

p，q は実数の定数で，$0<p<1$，$q>0$ をみたすとする。関数

$$f(x)=(1-p)x+(1-x)(1-e^{-qx})$$

を考える。

以下の問いに答えよ。必要であれば，不等式 $1+x\leqq e^x$ がすべての実数 x に対して成り立つことを証明なしに用いてよい。

(1) $0<x<1$ のとき，$0<f(x)<1$ であることを示せ。

(2) x_0 は $0<x_0<1$ をみたす実数とする。数列 $\{x_n\}$ の各項 $x_n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を，

$x_n=f(x_{n-1})$

によって順次定める。$p>q$ であるとき，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=0$

となることを示せ。

(3) $p<q$ であるとき，

$c=f(c)$，$0<c<1$

をみたす実数 c が存在することを示せ。

(1)は与えられた条件を利用すれば微分するまでもなく簡単に示せる。難しいことを考えるとかえって解けなくなる問題です。

(2)は「解けない漸化式（この問題では関数の形で与えられている）の一般項の極限」の定石である「等比数列型の漸化式に帰着し不等式で押さえ

込んで『はさみ打ちの原理』を練習していれば，それほど難しい問題ではないでしょう。ただ経験的にいえば，このパターンの問題は受験生が苦手とする問題であると言えます。ヒントにある $1+x\leqq e^x$ をどのように使うかが1つのポイントであるが，式の形を見れば，x を $-qx$ に置き換え，

$$1-qx\leqq e^{-qx}\Longleftrightarrow 1-e^{-qx}\leqq qx$$

と変形するところまでは大丈夫でしょう。後半の不等式で評価する部分は，「等比型に持ち込む」という先を見通す力があればそれほど難しい変形ではないが，この部分で大きな差がついたと思われます。

(3)については，$f(x)-x=0$ の解の存在に帰着することに気づかないと少し厳しいです。単純に「文字定数は分離せよ」は使えないので，$g(x)=f(x)-x$ とおいて微分する流れとなるが，1回の微分では極値を持つ値が見えないので，2回微分することになる。$g''(x)$ の符号から，$g'(x)$ の単調性を示し，さらに中間値の定理を用いて，$g'(x)=0$ の解の存在を示し，そこから，$y=g(x)$ の増減を調べ，$g(x)=0$ の解の存在を示すという流れは難関大学では頻出の考え方でした。ぜひ，しっかりマスターして欲しい考え方です。東大でもこの考え方は頻出で，2009年（Focus Gold数学Ⅲp.704⑭）に続く出題でした。なお，$g(x)$ を2回微分しなくても，$g(0)=0$，$g'(0)=-p+q>0$ より，$g(\alpha)>0$ となる α が $\alpha>0$ で限りなく0に近い部分に存在することから，$g(1)=-p<0$ より「中間値の定理」から，$g(c)=0$ となる c が存在すると示しても良いが，受験生にとっては厳密な答案をきちんと書くのが少し苦労を要するので，2回微分した方が無難でしょう。(3)まで完答できた生徒は少ないと思われます。(2)まででどれだけ出来たかが勝負となりそうです。合否の分かれ目になる問であったと予想します。

理系［5］（整数，数列）（8/20）
（求められる力：①，③，④）

r を0以上の整数とし，数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1=r,\ a_2=r+1,\ a_{n+2}=a_{n+1}(a_n+1)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

また，素数 p を1つとり，a_n を p で割った余りを b_n とする。ただし，0を p で割った余りは0とする。

(1) 自然数 n に対し，b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致することを示せ。

(2) $r=2$，$p=17$ の場合に，10以下のすべての自然数 n に対して，b_n を求めよ。

(3) ある2つの相違なる自然数 n，m に対して，

$$b_{n+1}=b_{m+1}>0,\ b_{n+2}=b_{m+2}$$

が成り立ったとする。このとき，$b_n=b_m$ が成り立つことを示せ。

(4) a_2，a_3，a_4，…に p で割り切れる数が現れないとする。このとき，a_1 も p で割り切れないことを示せ。

小問が4問あるので，前半で部分点を稼ぐことが出来る問題であった。テーマとしては「余りの問題」ですが，新課程に本格的に登場する，「合同式」，「部屋割り論法（鳩ノ巣原理）」を意識したと思われる出題でした。現行課程では，「合同式」を学んでいないので数式できちんと表現した方が良いでしょう。(新課程においても，中途半端な理解では，「合同式」はいい加減に記述する生徒が続出すると予想されるので，この手の問題では使用することはやめた方が無難でしょう。)(1)，(2)はサービス問題です。ここを落としてはいけません。

(3)は $b_{n+2}=b_{m+2}$ から，

$$b_{n+2}=b_{m+2}+cp$$
$$\Longleftrightarrow b_{n+1}(b_n+1)=b_{m+1}(b_m+1)+cp$$

と表現し直すことが出来るかどうかがポイント。(この変形は新課程の生徒にとっては「合同式」の定義がしっかりと頭に入っていれば，普通に出来ると思われるが，旧課程の生徒に取っては意外と盲点であったのではないかと予想する。)

$b_{n+1}(b_n-b_m)=cp$ と変形した後，p が素数であることと，b_{n+1} が p の倍数でないことを利用するが，その後の考え方が，一度は経験したことがないと難しい。($-p+1\leqq b_n-b_m\leqq p-1$ より，$b_n-b_m=0$ という部分)

しかし，この考え方は，しばしば使う考え方なので，新課程の生徒で難関大学を受験する生徒は必ず押さえておくべき考え方である。一例を挙げれば，「割り算の基本定理」($a=bq+r$ において，a，b を決めれば，商 q と，余り r は一意に決まる) の証明や，Focus Gold数学ⅠA p.436のColumnにある「整数論の基本定理」の前半部分（ステップ①）で似た考え方を利用しているので，ぜひ参考にして欲しいと思います。

(4)については，(3)をどう使うかが問題。目標としては，$a_1\equiv a_i(i\geqq 2)(\mathrm{mod}\ \ p)$…①を満たす a_i が存在することを示せば良いが，ここで，$a_1=pq_1+b_1$，$a_i=pq_i+b_i$ とおくと，(q_1，q_i は a_1，a_i を p で割ったときの商)

① $\Longleftrightarrow b_1=b_i$ …② より，結局，②を満たす b_i の存在を示せば良い。

普通に考えているだけでは見えてこないので，(2)の例に従って，$p=17$ でイメージすると，条件より，b_2，b_3，b_4，…は1～16のいずれか。よって b_{18} まで考えれば，「鳩ノ巣原理（部屋割り論法）」より，b_2～b_{18} までには少なくとも同じ値が2つあります。しかし，ここから，②を導くことは出来ません。そこで，(3)が使えるようになります。

$(b_n,\ b_{n+1})$ という数のペアを考えるところがポイントです。$b_n=1$～$p-1$ の $p-1$ 通りより，$(b_n,\ b_{n+1})$ の組み合わせは，たかだか $(p-1)^2$ 個。よって，このペアを十分沢山作れば（$(p-1)^2+1$ 個以上作れば），鳩ノ巣原理より $(b_n,\ b_{n+1})=(b_m,\ b_{m+1})$ を満たす整数 m，n が存在します。($1\leqq n<m$)

よって，(3)より，$b_{n-1}=b_{m-1}$ が成り立ちます。

以下，これをくり返すと，

$$b_{n-1}=b_{m-1},\ b_{n-2}=b_{m-2},\ b_{n-3}=b_{m-3},$$
$$\cdots,\ b_{n-(n-1)}=b_{m-(n-1)}\quad \therefore b_1=b_{m-n+1}$$

となり，

$$b_{m-n+1}>0\ (\because m-n+1\geqq 2)\ \text{より},\ b_1>0$$

よって，a_1 は p で割り切れません。

本問は昨年の東大の【5】に続き，少しパズル的な発想が必要となる数学オリンピック的な問題でした。昨年の問題に比べ，(3)の使い方は比較的，見抜きやすい問題ですが，ただ，アイディアの根本に「鳩ノ巣原理（部屋割り論法）」の考え方が必要なので現役生にとっては厳しい出題であったと思われます。理Ⅲ受験生でもほとんどが出来なかったのではないでしょうか。おそらく(3)も出来が良くないと思われるので，本問はあまり差がつかない1問になったでしょう。

先に述べたように，本問は新課程の「整数」分野の「発展事項」で扱われる，「合同式」や「鳩ノ巣原理（部屋割り論法）」を題材とした問題でした。来年以降，「整数」問題が本格的に出題されることを考えると，このように教科書では「発展事項」となっている内容についても一度はきちんと触れておいた方が良いかと思われる出題でした。(東大，京大，阪大，名大，東工大，一橋大，千葉大受験生には「必須アイテム」となるかも？)

理系［6］（図形と方程式）（8/20）
（求められる力：①，②，④）

座標平面の原点をOで表す。

線分 $y=\sqrt{3}x$ $(0\leqq x\leqq 2)$ 上の点Pと，線分 $y=-\sqrt{3}x$ $(-2\leqq x\leqq 0)$ 上の点Qが，線分OPと線分OQの長さの和が6となるように動く。このとき，線分PQの通過する領域を D とする。

(1) s を $0\leqq s\leqq 2$ をみたす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ。

(2) D を図示せよ。

ある条件の下に動く，線分の通過領域の問題。2007年度理系［3］とほぼ同じテーマ。(Focus Gold数学ⅡBp.726の⑥に掲載) 本年度は文系の3と同一問題であるが，文系より場合分けが少なく済む設定（これは狙いがあるのか，ひょっとすると出題ミス？）

本問には(1)の誘導があり，この誘導によってか

えって問題を解きにくくしている感があります。⑴が無ければ，普通に2次方程式の解の存在条件の問題として解けば良いので，標準レベルとなります。⑴の1つの文字を固定して考える考え方（本問では，s を固定して t を点Pの x 座標 p の2次関数とみて値域を考える方法，受験数学の用語では『fax の原理』と呼ばれることが多い）は，2007年の東大の問題でも全く同じ設定であるということを考えれば，東大がこの考え方を重要視していることが分かります。今後の対策としても，生徒にきちんと理解させたい考え方です。ただ，受験の戦略としては，⑴で何を問われているのかわかりにくかったならば，先に⑵を解の存在範囲の解き方で解き，図示した後，その図を見ながら⑴を考えるという手法をとるのが上手い方法かも知れません。（解答の順序を変えても，減点されることは無いと思われます。）いずれにしても，東大受験生にとっては再度，「通過領域の問題」はきちんと整理しておく必要があるでしょう。

ちなみに，生徒の受験報告を聞くと，本問に対して「2007年の類題であることはすぐに気づいた」生徒が多かったようです。しかし，先生方に聞くと実際の出来はそれほど良くなかったということです。

以上，6問で合計予想得点は，61/120 となりました。合格予想得点は，理Ⅰ，Ⅱで65＋α，理Ⅲで75＋α としました。

全体的な感想としては，どの問題もどこかで見たような問題が多く，受験生にとっては手がつきやすい問題だったとは思いますが，独創的な問題が少なく内容的に面白い問題がほとんど無かったので，そういった意味では来年に期待したいと思います。難易度に関しては,十分,差がつく良いセットだったと思うので，このレベルがしばらく続くのではないかと予想します。（あくまでも私の予想です。）

つづいて京大です。昨年よりやや難しくなりました。（解きにくい問題が増えました。後半３問）

【2014 京都大学】（合格予想ライン：医学部以外の理系55～60%，医学部65%）

理系［1］（空間ベクトル）（18/30）

（求められる力：①，②）

> 座標空間における次の3つの直線 l，m，n を考える：
>
> l は点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ -2)$ を通り，ベクトル $\vec{u}=(2,\ 1,\ -1)$ に平行な直線である。
>
> m は点 $\mathrm{B}(1,\ 2,\ -3)$ を通り，ベクトル $\vec{v}=(1,\ -1,\ 1)$ に平行な直線である。
>
> n は点 $\mathrm{C}(1,\ -1,\ 0)$ を通り，ベクトル $\vec{w}=(1,\ 2,\ 1)$に平行な直線である。
>
> Pを l 上の点として，Pから m，n へ下ろした垂線の足をそれぞれQ，Rとする。このとき，$\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ を最小にするようなPと，そのときの $\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ を求めよ。

京大必須の空間ベクトル。直線のベクトル方程式から，P，Q，Rをパラメーター表示すれば，後は垂直条件から，パラメーターが2つ消去できるので，後は計算問題。$\vec{u}\perp\vec{v}$，$\vec{w}\perp\vec{v}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\vec{w}$ などから図形的に処理しても良いが，少し複雑な位置関係になっているので，図形的に処理するより計算で代数的に処理した方が確実でしょう。

ちなみに，図形的には「三垂線の定理」を用いると「2点間の距離の2乗の和」の最大値，最小値の問題になります。合格のためには落とせない一問。

理系［2］（確率）（20/30）

（求められる力：①，③，④）

> 2つの粒子が時刻0において△ABCの頂点Aに位置している。これらの粒子は独立に運動し，それぞれ1秒ごとに隣の頂点に等確率で移動していくとする。たとえば，ある時刻で点Cにいる粒子は，その1秒後には点Aまたは点Bにそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ の確率で移動する。この2つの粒子が，時刻0の n 秒後に同じ点にいる確率 $p(n)$ を求めよ。

京大お得意の確率漸化式の問題。本問は状況設定が複雑ではないので立式も難しくありません。Focus Gold数学Ⅱ＋B についても確率漸化式の問題はいくつか扱っています（例題310～例題313，p760㉔など）ので，これらの標準問題で練習していれば十分に解ける問題です。この問題も落とせない問題。

理系［3］（三角比・三角関数，微分）（12/30）

（求められる力：①，②）

> △ABCは，条件∠B＝2∠A，BC＝1を満たす三角形のうちで面積が最大のものであるとする。このとき，cos∠Bを求めよ。

条件から，「正弦定理」を用いると容易に三角形の面積を ∠A＝θ の関数として表現することが出来ます。ただし，ここでは求める値を見越して，$\cos2\theta$ が出てくる形に式変形しようという意識が必要です。生徒は簡単に立式できる問題については，返って思いついた公式をどんどん代入するだけで，「先を見越した立式」が出来ずに途中で止まってしまうという場合が少なくないので，そうした意味で，三角関数のトレーニングの問題としてはなかなかの良問だと思います。（本問は三倍角の公式か「積和」の公式を使った後，半角の公式で $\cos2\theta$ の式に持ってきます。）その後の考え方は三角関数のままで微分するか，$\cos2\theta=t$ とおき，t の関数として微分するかに分かれますが，答案が書きやすいのは，t の関数で考えた方でしょう。三角関数のままで解答を書いた人は答えがあっていても，意外と減点されているかも知れません。（解 θ が唯一であるという部分の記述を正確に書けるかどうかが問題）京大はこうした標準問題で，いかに論理的飛躍のないきちんとした記述が出来るかどうかが決め手であることは，昨年の入試分析にも書かせていただきました。日頃からの丁寧な記述指導が重要となります。

理系［4］（分数関数，二次不等式）（5/30）

（求められる力：①，②）

> 実数の定数 a，b に対して，関数 $f(x)$ を
>
> $$f(x)=\frac{ax+b}{x^2+x+1}$$
>
> で定める。すべての実数 x で不等式
>
> $$f(x)\leqq f(x)^3-2f(x)^2+2$$
>
> が成り立つような点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ。

見た目が分数式なので，一瞬ぎょっとする問題ですが，与不等式が因数分解できることに気づけば，分母>0より，分母を払って二次不等式（絶対不等式）に帰着できます。ただ，このとき，$-1\leqq f(x)\leqq1$　または $2\leqq f(x)$ となりますが，$-1\leqq f(p)\leqq1$，$2\leqq f(q)$ となる p，q が同時に存在しないことを背理法等できちんと示す必要があります。（ここを省略している予備校の解答も見受けられました。）多くの受験生は，分数関数のまま，微分などをはじめて泥沼に陥ったのではないでしょうか。ただこの問題を，単なる「思いつくかどうか」のパズル的な問題ととらえるのは早合点です。やはり，京大の出題の姿勢として「闇雲に計算するのではなく，式（の背景）をきちんと読み取って筋道立てて考えて欲しい」ということではないでしょうか。そういった意味では，東大，京大においては，「意味の無い全くの機械的な計算問題」が出題されることはないので，まずは解き始める前に条件式について，きちんと分析する姿勢が大事です。そんなメッセージを感じさせられる一題でした。

理系［5］（整数問題）（8/30）

（求められる力：①，③，④）

> 自然数 a，b はどちらも3で割り切れないが，a^3+b^3 は81で割り切れる。このような a，b の組 $(a,\ b)$ のうち，a^2+b^2 の値を最小にするものと，そのときの a^2+b^2 の値を求めよ。

3で割った数の余りに関する問題です。条件から，a，b の組み合わせを，$a=3p+1$，$b=3q-1$（$p\geqq1$，

$q \geqq 1$）とおけるかどうかがポイント。この考え方は，ピタゴラス数（$a^2+b^2=c^2$ を満たす自然数）において，a，b のうち一方が 3 の倍数であることを示すときの考え方によく似ています。(Focus Gold 数学Ⅰ+A p.424～425のコラムにも載っています）一度，経験していれば，ここまではいけます。その後，a^3+b^3 が 81 の倍数という条件から $p+q$ が 9 の倍数であることが示せます。よって，$a+b$ が 27 の倍数であることは分かります。問題はここからです。a^2+b^2 の最小値を求めるわけですが，ここで，

$$a^2+b^2$$
$$=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(a-b)^2\}=\frac{1}{2}\{(27m)^2+k^2\}$$

（m は 1 以上の整数，$k=a-b$）と変形するか，

a^2+b^2 を p，q で表し，

$$a^2+b^2$$
$$=(3p+1)^2+(3q-1)^2$$
$$=9(p^2+q^2)+6(p-q)+2$$
$$=9\cdot\frac{1}{2}\{(p+q)^2+(p-q)^2\}+6(p-q)+2$$
$$=\frac{9}{2}\{(9k)^2+r^2\}+6r+2$$

（$p+q=9k$，$p-q=r$，k は正の整数，r は整数）と表し，最小値を考えれば良いですが，いずれにしても，

$$\square^2+\triangle^2=\frac{1}{2}\{(\square+\triangle)^2+(\square-\triangle)^2\}$$

という恒等式を知らないと，厳しいかもしれません。（コーシーシュワルツの不等式を利用しても可能です。）かなり数式を使い慣れた受験生でないと完答までたどり着くことは難しいと思います。

前半の部分でどれだけ部分点が稼げるかが大事な問題と言えるでしょう。本問はそれほど簡単な問題ではありませんが新課程の「整数」問題を考えたとき，今後このような問題は増えると思いますので一度は目を通しておきたい問題の一題です。

この問題を，

$$a^2+b^2$$
$$=(3p+1)^2+(3q-1)^2=9\left\{\left(p+\frac{1}{3}\right)^2+\left(q-\frac{1}{3}\right)^2\right\}$$

と変形して xy 平面における，有理点 $\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ と直線 $p+q=9k$ 上の格子点 $(p,\ q)$ の距離の最小値問題として考えても良いですが答案の書きやすさを考えると，上で述べた数式で考える方が点が取りやすいでしょう。

ちなみに，本問の類題は過去に東工大，早稲田大，千葉大にも出題されています。参考までに挙げておきます。

> （1984 東工大）
> a，b を正の整数とする。
> (1)　$c=a+b$，$d=a^2-ab+b^2$ とおくとき，不等式 $1<\dfrac{c^2}{d}\leqq 4$ を示せ。
> (2)　a^3+b^3 が素数の整数乗となる a，b をすべて求めよ。

> （1999 早稲田大　理工）
> (1)　$a+b \geqq a^2-ab+b^2$ をみたす正の整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。
> (2)　$a^3+b^3=p^3$ をみたす素数 p と正の整数 a，b は存在しないことを示せ。

> （2001 千葉大）
> 自然数 x，y を用いて，$p^2=x^3+y^3$ と表せるような素数 p をすべて求めよ。また，このときの x，y をすべて求めよ。

理系［6］（三角関数，微分，積分法）（12/30）
（求められる力：①，②，③，⑤）

> 双曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ の第 1 象限にある部分と，原点 O を中心とする円の第 1 象限にある部分を，それぞれ C_1，C_2 とする。C_1 と C_2 は 2 つの異なる点 A，B で交わり，点 A における C_1 の接線 l と線分 OA のなす角は $\dfrac{\pi}{6}$ であるとする。このとき，C_1 と C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ。

計算でごり押ししても解けるが，図形の対称性を活かして上手に解きたいところ。この視点は京大の面積問題で共通して言える特徴です。対称性から $\mathrm{A}\left(t,\ \frac{1}{t}\right)$，$\mathrm{B}\left(\frac{1}{t},\ t\right)$ $(t>0)$ とおいても一般性は失いません。すると，A，B から x 軸に下ろした垂線の足を H，K とすると求める面積の線分 AB の上半分の面積を S_1，下半分の面積を S_2 とすると，

$$S_1=\text{扇型 OAB}-\triangle\mathrm{OAB},$$
$$S_2=\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{OBK}-\triangle\mathrm{OAH}-\int_t^{\frac{1}{t}}\frac{1}{x}dx$$

よって，

$$\text{求める面積 } S=S_1+S_2=\text{扇型 OAB}-\int_t^{\frac{1}{t}}\frac{1}{x}dx$$

$\left(\because \triangle\mathrm{OAH}=\triangle\mathrm{OBK}=t\times\frac{1}{t}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\right)$

ここで，l の傾き $-\frac{1}{t^2}$，OA の傾き $\frac{1}{t^2}$ で傾きの絶対値が等しく正負が逆より，

（l と $x=t$ のなす角）＝（OA と $x=t$ のなす角）$=\frac{\pi}{12}$

より，$\angle y\mathrm{OA}=\angle \mathrm{BO}x=\frac{\pi}{12}$

よって，$\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{3}$，

OB の傾き $t^2=\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$

でるから，$\int_t^{\frac{1}{t}}\frac{1}{x}dx=\Big[\log x\Big]_t^{\frac{1}{t}}=\log\frac{1}{t^2}$ より，

$$S=\frac{2\pi}{3}+\log(2-\sqrt{3})$$

と暗算レベルで求めることが出来ます。

参考書にあるような標準的な問題ではあるが，最後の正しい正解にたどり着くのは意外と大変かもしれません。医学部以外の理系にとっては本問の出来が合否を分けると予想されます。

以上，京大でした。受験生の報告によると，多くの受験生は「易しくなった」，「手応え十分」と言っていたようですが，そんなに京大の採点は甘くないと思います。

昨年の分析にも書きましたが本年度の問題を見ても京大は標準問題を出題し，その中で「いかに筋道を立てた論理的な答案が書けるか」という点を重要視する入試問題にシフトしている気がします。昔から「論理の京大」といわれますが，標準的な問題で十分にこの判別が出来るということでしょう。日頃の添削等の答案指導が効果的だと思われます。

以上，東大，京大の問題をざっと眺めてきました。少しでも先生方の指導に参考になれば幸いです。

その他，2014年度入試で目立った問題を挙げておきましょう。自分自身が面白かった問題や実際に先生方に教えていただいたものを幾つか挙げますので，お時間がありましたら，ぜひ一度目を通していただければと思います。

①　名古屋大学　理系［4］

> 負でない整数 N が与えられたとき，$a_1=N$，$a_{n+1}=\left[\dfrac{a_n}{2}\right]$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ として数列 $\{a_n\}$ を定める。ただし $[a]$ は，実数 a の整数部分（$k \leqq a < k+1$ となる整数 k）を表す。
> (1)　$a_3=1$ となるような N をすべて求めよ。
> (2)　$0 \leqq N < 2^{10}$ をみたす整数 N のうちで，N から定まる数列 $\{a_n\}$ のある項が 2 となるようなものはいくつあるか。
> (3)　0 から $2^{100}-1$ までの 2^{100} 個の整数から等しい確率で N を選び，数列 $\{a_n\}$ を定める。次の条件 (＊) をみたす最小の正の整数 m を求めよ。
> 　(＊)　数列 $\{a_n\}$ のある項が m となる確率が $\dfrac{1}{100}$ 以下となる。

個人的には今年一番面白かった問題です。内容は「二進法」ですが，どのように答案を書くか，また，どのように説明したら生徒が理解してくれるかを考えるのが面白かったです。生徒も(2)までは，なんとかいけそうですが，(3)はほとんどの生徒が出来なかったと思います。（理Ⅲの生徒でも難しいでしょう。でも面白いです。）

② 大阪大学　理系［1］

> 実数 a，b，c，d，e に対して，座標平面上の点 A(a，b)，B(c，d)，C(e，0) をとる。ただし点 A と点 B はどちらも原点 O(0，0) とは異なる点とする。このとき，実数 s，t で
> $$s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
> を満たすものが存在するための，a，b，c，d，e についての必要十分条件を求めよ。

「ベクトルの一次独立」の問題で，丁寧に場合分けをすれば，計算の問題になるのですが，「必要十分条件を求めよ」という出題形式により，多くの生徒は戸惑ったのかも知れません。そういった意味では，指導の盲点をつく良問かも知れません。昨年の公式の証明に続いて，阪大は少しオリジナリティを出そうという気概が見られます。「良問の阪大」，復活の兆しです。

③ 千葉大学　理系［13］

> 自然数 n に対して，和
> $$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$
> を考える。
> (1) 各自然数 n に対して $2^k\leqq n$ をみたす最大の整数 k を $f(n)$ で表すとき，2 つの奇数 a_n，b_n が存在して
> $$S_n=\frac{a_n}{2^{f(n)}b_n}$$
> と表されることを示せ。
> (2) $n\geqq 2$ のとき，S_n は整数にならないことを示せ。
> (3) さらに，自然数m，n ($m<n$) に対して，和
> $$S_{m,\ n}=\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\cdots+\frac{1}{n}$$
> を考える。$S_{m,\ n}$ はどんな m，n ($m<n$) に対しても整数にならないことを示せ。

「整数問題の千葉大」にふさわしくかなりの難問です。しかし，単に難問というだけではなく，「実験して規則性を見いだす」という練習にはもってこいの問題です。名古屋大学の問題と同様に，規則性が見えても答案の書き方が難しい一問です。ぜひ，東大，京大，名大の受験生にはやらせてみたい一問です。

④ 岐阜大学　理系［3］

> 2014^{10} に関して，以下の問に答えよ。ただし，必要ならば $7^9=40353607$ および $7^{10}=282475249$ を用いてよい。
> (1) 2014^{10} の十の位の数字を求めよ。
> (2) 2014^{10} の十万の位の数字を求めよ。
> (3) 2014^{10} の上 3 桁の数字を求めよ。

2014 の 10 乗に関する問題で，問題としてはよく見かける問題ですが，計算が恐ろしい！
電卓使わずに計算が出来る生徒を尊敬します！

最後に，「新課程に向けてどのような指導を行っていくべきか」，という点について，私個人の考え方（入試の出題者という立場で）を幾つか挙げてみたいと思います。

教員として受験指導となると，「センター数学」，「二次の数学」の2つを頭の中に入れておかなければなりません。「数学という教科（学問）にセンターも二次もない！」という意見は確かに正論ですが，ただ，生徒からしてみれば，形式的にも技術的にも大きく異なるものなので，指導者としてはある意味での「線引き」をしてあげたいものです。ただ，私が言いたいのは，「センター数学」という客観式と「二次試験」のような記述数学に対して，指導法や対策を別のものにしろというのではありません。大事なことは，日頃から，この「2つの数学」を有機的に結びつけた指導ができるかどうかということです。そこで以下，「2つの数学」の関係について次のページの表にまとめてみました。

【センター試験数学と二次試験数学の違い】

	センター試験　数学（客観式数学）		二次数学（記述式数学）
①	スピード，計算力	⟺	じっくり，表現力
②	解き方（公式, パターン）重視（解ける）	⟺	意味，原理，背景（分かる，説明できる）
③	いかに手を動かすことができるか （具体・帰納）	⟺	より一般性のある考え方が出来るか （抽象・演繹）
④	いかに定石を適用するか	⟺	定石から外れた問をどう切り崩すか
⑤	知識をもっているか（量）	⟺	知識を使いこなすことができるか（質）
⑥	どの解法が最短コースか	⟺	どれだけ多様な考え方ができるか
⑦	横のつながり	⟺	縦のつながり

> 【2つの数学をつなぐ一番の方法】
> (ア)　公式の証明
> (イ)　別解を考える
> (ウ)　とにかく自分で解く（答えを見ない）
> センター数学では解けても二次数学が解けない最大の原因はここ！
> (エ)　スピード練習（センター）と，じっくり練習（記述）の両立
> →センター数学では分設定，記述数学は最低でも一題分は考える習慣
> (オ)　振り返りを行う（なぜ自分が解けなかったのかを明確にする）

具体的な教材がないと少しイメージが湧きにくいかもしれませんが，普段から指導案を作る際に（指導案を作らないまでも指導プランを立てる際に）①～⑦のキーワードだけでも頭に入れておくと，授業の目的やねらいが明確になります。特に3年生の問題演習のような教師からの「一方通行」的な授業になるときほど，役に立つと思います。（実際，私が教員研修などを行うときは，上のキーワードを挙げながら，具体的な教材で指導法を示しています。）

新課程になり，学ぶ内容は増えたにも関わらず，授業時間数がなかなか確保できずご苦労されている先生方も多いと思います。昨年の入試分析の記事（Focus Gold 通信vol.5）でも書きましたが，今後このような状況の中，我々教師にとっても，生徒に取っても一番の求められることは，「量から質の学習への転換」です。そのポイントは「良問の徹底的な反復練習による完全理解」です。

Focus Gold は2～3年ごとに改訂を行い，最新の入試問題の中から今後の入試傾向を考えた問題を積極的に取り入れています。それらの問題は繰り返し学習していただくことによって，他の問題にも応用が利く良問を厳選してあります。実際に，Focus Gold をご採用していただいている学校の中には，3 年生の本格的な入試問題演習に入る前にFocus Gold のチャレンジ編の問題をじっくり取り組ませたり，逆に入試の総仕上げとしてチャレンジ編を活用して大きな成果を挙げている学校もあるようです。本年度も東大を始め，多くの大学でFocus Gold からの類題が出たことでも，その問題の精選性は実証されたと自負しております。

くり返しますが，「中途半端な理解」では何百問やろうが効果は低いです。仮にその方法で，入

試を突破したとしても，大学に入った途端にさっぱり忘れてしまうでしょう。我々指導者は単に「大学に合格させる」だけでなく，大学に入ってからも通用する，「考え抜く力」を数学という教科を通して育てたいものです。

竹内英人（takeuchi@meijo-u.ac.jp）

Message

Rimse 理事長賞研究作品の複素数平面による解析

Focus Gold・Focus Up 編集委員
豊田 敏盟
Toshiaki Toyoda

東京大学に今春入学した山下真由子さんは，前年の高校3年のとき「第54回国際数学オリンピック」の国内候補者選考会で最優秀賞を得，本番の国際数学オリンピックコロンビア大会（2013年7月開催）では銀メダルを獲得した優秀な学生です（日本代表６名は全員，銀メダルを受賞。山下さんと金メダル受賞者との差は僅か1点）。

その山下さんが，一般財団法人理数教育研究所 Rimse 主催塩野直道記念第1回「算数・数学の自由研究」作品コンクール（2013 年度実施）に，次の予想とその証明に関する研究作品を応募され，Rimse 理事長賞を受賞しました。

1．山下真由子さんの「外心と傍心，内角の二等分線の関係について」の予想とその証明の方針（原文）

△ABC が与えられたとき，∠B，∠C の二等分線の足を結んだ直線は初等幾何の問題で頻繁に現れる。しかし，この直線と直線 BC のなす角は，∠A，∠B，∠C を用いた簡単な形で表すことはできない。私は，この単純だがよく分からない直線の傾きに興味を持った。そこで色々と図を描いて調べていくうちに，この直線は外心 O と傍心 J_A を結んだ直線 OJ_A と垂直なのではないか，という予想が立った。この研究では，この命題を射影幾何を用いて初等的に示す。

研究内容の実際は，http://www.rimse.or.jp/research/past/winner1st.html（2013年度 塩野直道記念第1回「算数・数学の自由研究」作品コンクール受賞作品）をご覧願うとして，本稿では，山下さんの予想を複素数平面を用いて証明し，併せて，∠B，∠C の二等分線の足を結んだ直線と直線 BC のなす角は，∠A，∠B，∠C を用いた簡単な形で表すことができない理由に迫りたいと思います。

2．山下さんの予想を複素数平面を用いて証明する

$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$ である△ABC の外心 O を原点とする複素数平面を定め，頂点 A，B，C を表す複素数を α，β，γ とする。

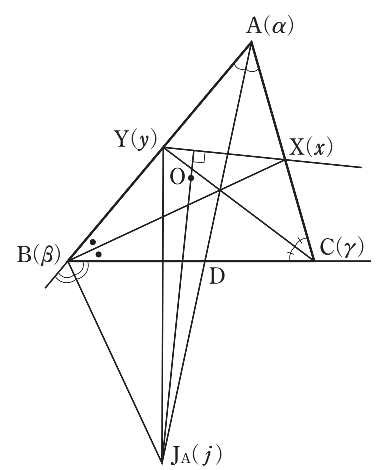
次に，∠B，∠C の 2 等分線と AC，AB との交点を $X(x)$，$Y(y)$ とすると，

$$x=\frac{a\alpha+c\gamma}{a+c},\quad y=\frac{a\alpha+b\beta}{a+b}$$

である（証明は省略）。

また，∠A の内角の 2 等分線，∠B の外角の 2 等分線の交点（傍心）を $J_A(j)$ とすると

$$j=\frac{-a\alpha+b\beta+c\gamma}{-a+b+c}$$ である。



（証明）線分 AJ_A と辺 BC との交点を D とすると，AJ_A は∠A の二等分線であるから，
BD : DC $=c:b$ より，

点 D を表す複素数は $\dfrac{c\gamma+b\beta}{b+c}$ で，

$$\mathrm{BD}=\frac{c\cdot a}{b+c}$$

また，線分 BJ_A は∠B の外角の二等分線であるから，

点 $J_A(j)$ は線分 AD を

$$\mathrm{AB}:\mathrm{BD}=c:\frac{c\cdot a}{b+c}=(b+c):a$$

に外分する点である。

$$\text{よって，} j=\frac{-a\alpha+(b+c)\cdot\dfrac{c\gamma+b\beta}{b+c}}{-a+(b+c)}$$
$$=\frac{-a\alpha+b\beta+c\gamma}{-a+b+c}$$

直線 XY⊥ 直線 OJ_A を示すには，

$\arg\dfrac{x-y}{j}=\dfrac{\pi}{2}$，つまり，$\dfrac{x-y}{j}=$純虚数

を証明すればよい。

3. $\dfrac{p+qi}{r+si}=$純虚数 となる実数 p，q，r，s の条件

$\dfrac{p+qi}{r+si}=$純虚数 となる実数 p，q，r，s $(rs\neq 0)$ の条件を求める。

分母の実数化により，

$$\frac{(p+qi)(r-si)}{(r+si)(r-si)}=\frac{(pr+qs)+(qr-ps)i}{r^2+s^2}$$

であるから，$pr+qs=0$，$qr-ps\neq 0$ となればよい。

$pr+qs=0$ と $rs\neq 0$ から，

$$\frac{p}{s}=-\frac{q}{r}=l \quad (l\text{ は } l\neq 0 \text{ の実数})$$

とおける。

$p=ls$，$q=-lr$ を $qr-ps$ に代入すると，

$$-lr^2-ls^2=-l(r^2+s^2)$$

$r^2>0$，$s^2>0$，$l\neq 0$ であるから，$qr-ps\neq 0$ は成立する。

よって，求める条件は，$pr+qs=0$ ……①

である。

4. $\dfrac{x-y}{j}=$純虚数 の証明

$$x-y=\frac{a\alpha+c\gamma}{a+c}-\frac{a\alpha+b\beta}{a+b}$$
$$=\frac{a(b-c)\alpha-b(a+c)\beta+c(a+b)\gamma}{(a+b)(a+c)}\ \text{より，}$$

$$\frac{x-y}{j}=\frac{\dfrac{a(b-c)\alpha-b(a+c)\beta+c(a+b)\gamma}{(a+b)(a+c)}}{\dfrac{-a\alpha+b\beta+c\gamma}{-a+b+c}}$$
$$=\frac{-a+b+c}{(a+b)(a+c)}\cdot\frac{a(b-c)\alpha-b(a+c)\beta+c(a+b)\gamma}{-a\alpha+b\beta+c\gamma}$$
$$=k\cdot\frac{a(b-c)\alpha-b(a+c)\beta+c(a+b)\gamma}{-a\alpha+b\beta+c\gamma}$$

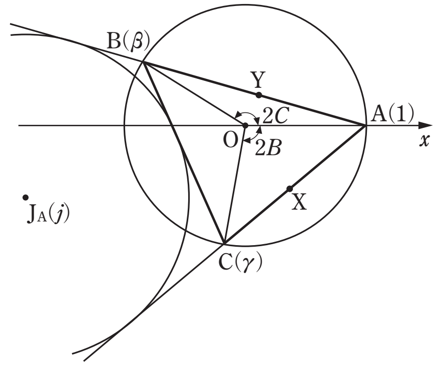
となる。

ただし，$k=\dfrac{-a+b+c}{(a+b)(a+c)}$ で，k は実数

よって，$\dfrac{a(b-c)\alpha-b(a+c)\beta+c(a+b)\gamma}{-a\alpha+b\beta+c\gamma}$ が純虚数であれば，$\dfrac{x-y}{j}=$純虚数 となり，

直線 XY⊥直線 OJ_A が成り立つ。

次に，△ABC の外接円 O の半径=1 とすると，正弦定理より，$a=2\sin A$，$b=2\sin B$，$c=2\sin C$



外心 O は複素数平面上の原点で OA=1 であるから，点 A を実軸上に定めると $\alpha=1$

中心角 ∠AOB$=2C$，∠AOC$=2B$ より，

$\beta=\cos 2C+i\sin 2C$ （点の回転）

$\gamma=\cos(-2B)+i\sin(-2B)$

$=\cos 2B-i\sin 2B$

よって，

$a(b-c)\alpha-b(a+c)\beta+c(a+b)\gamma$

$=2\sin A(2\sin B-2\sin C)$
$\quad -2\sin B(2\sin A+2\sin C)(\cos 2C+i\sin 2C)$
$\quad +2\sin C(2\sin A+2\sin B)(\cos 2B-i\sin 2B)$

$=4\{\sin A(\sin B-\sin C)-\sin B(\sin A+\sin C)\cos 2C$
$\quad +\sin C(\sin A+\sin B)\cos 2B\}$
$\quad -4i\{\sin B(\sin A+\sin C)\sin 2C$
$\quad +\sin C(\sin A+\sin B)\sin 2B\}$

この実部を計算すると

$4\{\sin A(\sin B-\sin C)-\sin B(\sin A+\sin C)\cos 2C$
$\quad +\sin C(\sin A+\sin B)\cos 2B\}$

$=4\{\sin A(\sin B-\sin C)$
$\quad -\sin B(\sin A+\sin C)(1-2\sin^2 C)$
$\quad +\sin C(\sin A+\sin B)(1-2\sin^2 B)\}$
（2 倍角の公式）

$=8\{\sin A\sin B\sin C(\sin C-\sin B)$
$\quad +\sin B\sin C(\sin^2 C-\sin^2 B)\}$

$=4\sin B\sin C\{2\sin A(\sin C-\sin B)$
$\quad +(1-\cos 2C)-(1-\cos 2B)\}$

$=4\sin B\sin C\{2\sin A(\sin C-\sin B)$
$\quad +(\cos 2B-\cos 2C)\}$

$=4\sin B\sin C\{2\sin A(\sin C-\sin B)$
$\quad -2\sin(B+C)\sin(B-C)\}$ （差→積）

$=4\sin B\sin C\{2\sin A(\sin C-\sin B)$
$\quad -2\sin A\sin(B-C)\}$ $(B+C=\pi-A)$

$=-8\sin A\sin B\sin C\{\sin B-\sin C+\sin(B-C)\}$

虚部を計算すると

$-4\{\sin B(\sin A+\sin C)\sin 2C$
$\quad +\sin C(\sin A+\sin B)\sin 2B\}$

$=-8\sin B\sin C\{(\sin A+\sin C)\cos C$
$\quad +(\sin A+\sin B)\cos B\}$ （2 倍角の公式）

$=-4\sin B\sin C\{2\sin A(\cos C+\cos B)$
$\quad +(\sin 2B+\sin 2C)\}$

$=-4\sin B\sin C\{2\sin A(\cos C+\cos B)$
$\quad +2\sin(B+C)\cos(B-C)\}$ （和→積）

$=-8\sin B\sin C\{\sin A(\cos C+\cos B)$
$\quad +\sin(\pi-A)\cos(B-C)\}$

$=-8\sin A\sin B\sin C\{\cos B+\cos C+\cos(B-C)\}$

また，

$-a\alpha+b\beta+c\gamma$

$=-2\sin A+2\sin B(\cos 2C+i\sin 2C)$
$\quad +2\sin C(\cos 2B-i\sin 2B)$

この実部を計算すると

$-2(\sin A-\sin B\cos 2C-\sin C\cos 2B)$

$=-2\{\sin A-\sin B(1-2\sin^2 C)-\sin C(1-2\sin^2 B)\}$
（2 倍角の公式）

$=-2\{\sin A-(\sin B+\sin C)(1-2\sin B\sin C)\}$

$=-2\left\{2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}-2\sin\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}\right.$
$\quad \left.\times(1-2\sin B\sin C)\right\}$ （和→積）

$=-4\left\{\cos\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{A}{2}-\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}\right.$
$\quad \left.\times(1-2\sin B\sin C)\right\}$ $(B+C=\pi-A)$

$=-4\cos\dfrac{A}{2}\left(\cos\dfrac{B+C}{2}-\cos\dfrac{B-C}{2}\right.$
$\quad \left.+2\sin B\sin C\cos\dfrac{B-C}{2}\right)$

$=-4\cos\dfrac{A}{2}\left(-2\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\right.$
$\quad \left.+8\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}\right)$
（差→積）

$=8\cos\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\left\{1-2\left(\cos\dfrac{B+C}{2}\right.\right.$
$\quad \left.\left.+\cos\dfrac{B-C}{2}\right)\cos\dfrac{B-C}{2}\right\}$

$=8\cos\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\left\{-2\cos\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}\right.$
$\quad \left.+\left(1-2\cos^2\dfrac{B-C}{2}\right)\right\}$

$=-8\cos\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\{\cos B+\cos C$
$\quad +\cos(B-C)\}$ （半角の公式）

虚部を計算すると

$2(\sin B\sin 2C-\sin C\sin 2B)$

$=4\sin B\sin C(\cos C-\cos B)$

$=16\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

$$\times\left(-2\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C-B}{2}\right)\quad(\text{差→積})$$

$$=32\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}\right)$$

$$(B+C=\pi-A)$$

$$=32\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right.$$

$$\left.\times\left(\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\right\}$$

$$=16\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\left(\sin B\cos^2\frac{C}{2}\right.$$

$$\left.-\sin C\cos^2\frac{B}{2}\right)$$

$$=16\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\left(\sin B\cdot\frac{1+\cos C}{2}\right.$$

$$\left.-\sin C\cdot\frac{1+\cos B}{2}\right)\quad(\text{半角の公式})$$

$$=8\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\{\sin B-\sin C$$

$$+(\sin B\cos C-\sin C\cos B)\}$$

$$=8\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\{\sin B-\sin C+\sin(B-C)\}$$

よって，$a(b-c)\alpha-b(a+c)\beta+c(a+b)\gamma$ の実部を p，虚部を q，$-a\alpha+b\beta+c\gamma$ の実部を r，虚部を s とすると，

$$p=-8\sin A\sin B\sin C\{\sin B-\sin C+\sin(B-C)\}$$

$$q=-8\sin A\sin B\sin C\{\cos B+\cos C+\cos(B-C)\}$$

$$r=-8\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\times\{\cos B+\cos C+\cos(B-C)\}$$

$$s=8\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\{\sin B-\sin C+\sin(B-C)\}$$

となり，これらの p，q，r，s は，前記①の条件 $\boldsymbol{pr+qs=0}$ を満たすから，$\dfrac{x-y}{j}$＝純虚数となり，直線 XY⊥ 直線 $\mathrm{OJ_A}$ が成り立つ。

5．直線 XY と直線 BC のなす角は容易に求め難い理由

直線 BC と実軸とのなす角は，

$$\gamma-\beta=(\cos 2B-i\sin 2B)-(\cos 2C+i\sin 2C)$$

$$=(\cos 2B-\cos 2C)-i(\sin 2B+\sin 2C)$$

$$=-2\sin(B+C)\sin(B-C)$$

$$-2i\sin(B+C)\cos(B-C)$$

$$=-2\sin(B+C)\{\sin(B-C)+i\cos(B-C)\}$$

$$=-2\sin(B+C)\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-B+C\right)\right.$$

$$\left.+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-B+C\right)\right\}$$

より，$\arg(\gamma-\beta)=\dfrac{\pi}{2}-B+C$ である。

一方，直線 XY と実軸とのなす角は，

$$a(b-c)\alpha-b(a+c)\beta+c(a+b)\gamma$$

$$=-8\sin A\sin B\sin C[\{\sin B-\sin C+\sin(B-C)\}$$

$$+i\{\cos B+\cos C+\cos(B-C)\}]$$

となるが，$\cos B+\cos C+\cos(B-C)$ の式変形がままならず，ここで行き詰まってしまう。

（直線 $\mathrm{OJ_A}$ と実軸とのなす角についても同様である。）

この辺りに，「この直線 XY と直線 BC のなす角は，∠A，∠B，∠C を用いた簡単な形で表すことはできない理由」がありそうである。

【追記】先般，仙台市で開催された啓林館主催「東北数学フォーラム」で，私は山下真由子さんの研究を紹介する際，「直線 XY は外心と傍心を結んだ直線と垂直」を「直線 XY は内心と傍心を結んだ直線と垂直」と申してしまいました。その後，啓林館にお願いして，可能な限りの訂正の手配をいたしましたが，ここに改めてお詫びと訂正をさせていただきます。

生徒の素朴な疑問に答えるために⑤
―私の数学質問ノートから―

【岐阜県】佐々木学園 鶯谷中学・高等学校
校長　小邑 政明

Q　ベクトルという言葉は，力の大きさとその向きを同時に表す概念として，物理の力学からでてきたと思いますが，なぜ数学で重要視されるのでしょうか。また，ベクトルの導入のところで，その性質として多くの式が書かれていますが、なぜ必要なのでしょうか。

解説

ベクトルが数学で重要視されている理由の1つに，「次元を超えて使える道具」という見方と「他の分野に応用できる」という汎用性がある。

前者は，平面ベクトル，空間ベクトルで同様の概念や公式が導かれることから理解できるであろう。さらに，一般の n 次元でも同様である。後者の例をあげる。

「例1」

平面上の平行でない2つのベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ とおくとき，

平面上の任意のベクトル $\vec{x}$ は，実数 p と q を使って，$\vec{x}=p\vec{a}+q\vec{b}$ と表せる。

「例2」

複素数 $a+bi$ は，$a\cdot 1+b\cdot i$ と表され，「例1」と同じ考え方をすれば，

複素数は，1と i という2つの「平行でないベクトル」の1次結合で表されていると理解できる。

以下，興味深い例をあげる。

「例3」

漸化式 $a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$ の解は，$a_n=p\cdot 2^n+q\cdot 3^n$ と表せる。

「例4」

微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}-5\dfrac{dy}{dx}+6y=0$ の解は，$y=p\cdot e^{2x}+q\cdot e^{3x}$ と表せる。

これらの例は，平面上のベクトル，複素数，例3の漸化式の解，例4の微分方程式の解は「実数上2次元のベクトル空間」という言葉で一くくりにできる。

3次元，一般の n 次元でも同様である.

「例5」

$f(x)$ が 2π を周期とする微分可能な関数で，$f'(x)$ も連続関数ならば，

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

となる。右辺の無限級数をフーリエ級数という。このベクトル空間の次元は可算無限次元である。

このように，ベクトルの概念は，現代数学の基盤の1つになっている。

真の数学力が身につく

Focus Gold（フォーカス・ゴールド） 新課程

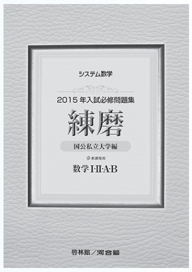
A５判
3色刷

1 『先に進める学習』と『基本も押さえる』に応えた「マスター編」
フォローアップ（進める学習）とフィードバック（振り返り学習）で入試に必要な学力が確実に身につきます。

2 充実したコラム
数学への興味や知識の深まりなどが感じられる内容になっています。

数学Ⅰ+A，数学Ⅱ+B
数学Ⅱ，数学Ⅲ

入試に必要な「数学の本質」が確実に身につく



システム数学　2015年入試必修問題集シリーズ

●河合塾の徹底した入試分析で良質の問題を厳選
●難関国公私立大学の入試に対応した『実戦』と国公私立大学の入試に対応した『練磨』の２シリーズ発刊
●入試に必要な重要問題で構成したテーマ別問題と，最近の傾向で学習できる総合演習問題の２部構成

実　戦	数学Ⅰ·Ⅱ·A·B	A5判	192頁／定価本体600円+税 【解答（別冊）】A5判／276頁／定価本体476円+税
実　戦	数学Ⅲ	A5判	116頁／定価本体467円+税 【解答（別冊）】A5判／180頁／定価本体495円+税
練　磨	数学Ⅰ·Ⅱ·A·B	A5判	152頁／定価本体571円+税 【解答（別冊）】A5判／168頁／定価本体286円+税
練　磨	数学Ⅲ	A5判	96頁／定価本体381円+税 【解答（別冊）】A5判／100頁／定価本体238円+税

理数教育の未来へ
啓林館
http://www.shinko-keirin.co.jp/

〒543-0052　大阪市天王寺区大道4-3-25　TEL.06-6779-1531　FAX.06-6779-5011
〒113-0023　東京都文京区向丘2-3-10　TEL.03-3814-2151　FAX.03-3814-2159
〒003-0005　札幌市白石区東札幌5条2-6-1　TEL.011-842-8595　FAX.011-842-8594
〒461-0004　名古屋市東区葵1-4-34 双栄ビル2F　TEL.052-935-2585　FAX.052-936-4541
〒732-0052　広島市東区光町1-7-11 広島CDビル5F　TEL.082-261-7246　FAX.082-261-5400
〒810-0022　福岡市中央区薬院1-5-6 ハイヒルズビル5F　TEL.092-725-6677　FAX.092-725-6680

20140701