啓林館

啓林館 高校数学 教育情報誌

フォーカスゴールド Focus Gold 通信

[特集] p.2-6

海外で求められている日本の数学
～マレーシア政府派遣留学生の指導を通して～

沢畑雅彦

vol.9

特集 海外で求められている日本の数学 ～マレーシア政府派遣留学生の指導を通して～

沢畑雅彦

日本の数学は世界さまざまな場面で求められています。ここでは，マレーシアにて行われている取り組みについて紹介します。

1．日本の数学を海外で教えるということ

こんにちは，マラヤ大学の沢畑です。

と言いましても，昨年の3月までは茨城県の県立高校で普通に数学を教えていました。現在は文部科学省よりマレーシアの首都クアラ・ルンプールにあるマラヤ大学予備教育センター（英：Centre For Foundation Studies in Science, University of Malaya，馬：Pusat Asasi Sains, Universiti Malaya，略称：PASUM） に派遣され，毎日マレー人の学生に数学を教えています。これだけでの説明では，まだすごいことのように聞こえますが，今までの仕事とそれほど変わりません。まず，私たちの仕事について簡単に説明したいと思います。

私たちの仕事は，日本の大学への留学を目指しているマレーシアの学生に日本の高校の数学を教えることです。ですから授業は今まで高校で教えていた内容とほとんど変わりません。日本に留学するための授業ですので，授業は基本的には日本語です。もちろんすべてがうまく伝わる訳ではないので，ときには単語程度の英語を使うこともありますが，私たちの想像以上に学生たちは日本語をよく理解しているので，こちらの意図が伝わらなくて困ることはまずありません。

私たちはPASUMの中の日本留学特別コース（英：Special Preparatory Program to enter the Japanese Universities，馬：Rancangan Persediaan Khas Jepun，略称：RPKJ）に所属しています。しかし自分たちのコースを言う場合，このコースの施設の名前であるAAJ（馬：Ambang Asuhan Jepun，英：Gateway to Japan）の方をよく使います。このコースはマハティール元マレーシア首相が提唱した「東方政策」（Look East Policy）の下，日本政府の協力によってできたコースであり，昨年の6月に入学した学生たちが第32期生となります。30年以上にわたり，学生を毎年日本に送り出し，これまでに約3,400名の学生を日本の国立大学に留学させてきました。

マレーシアの教育制度は初等学校が6年，中等学校が5年です。その中等学校5年にSPM（馬：Sijil Pelajaran Malaysia，日：マレーシア教育証書）という学力検査を受け，その結果によってマレーシア政府人事院（英：Public Service Department of Malaysia，略称：PSDまたは馬：Jabatan Perkhidmatan Awam Malaysia，略称：JPA）によって選ばれた学生がAAJに入学してきます。学生たちはAAJに2年間所属し，日本語，数学，物理，化学，英語を勉強します。1コマ50分の授業が月曜日から木曜日までは9コマ，金曜日は宗教上の都合で6コマですから，週42コマの授業を受けています。

学生たちは2年生のときに受験する日本留学試験（英：Examination for Japanese University Admission for International Students，略称：EJU）での合格をめざします。EJUは日本で行われるセンター試験のような空欄補充問題で，違いと言えば「数学Ⅲ・C」も出題範囲となっていることくらいでしょう。この試験に合格し進学先が決定しますと，晴れて「マレーシア政府派遣留学生」として日本に留学することができます。派遣留学生となれば学費や生活費はマレーシア政府の負担となります。日本留学はとても名誉なことです。学生たちはその日本留学を目指して日夜努力をするのです。

これだけ書くと勉強ばかりしているようですが，「スポーツ大会」や「企業訪問」，「先輩の話を聞く会」，「日本の高校生との交流会」，「日本人家庭訪問」などの様々な行事もあり，この点でもAAJの教育は日本の学校と変わりありません。

AAJには私たち数学の他に物理，化学を教える教科教員と日本語を担当する日本語教員がいます。日本語科にはマレー人の方もいますが，あとはすべて日本人です。当然ながら職員室での会話は日本語です。大学のオフィスとのやりとりなどで英語を使うことはありますが，それもなんとかなっています。数学教員は全部で7名おり，北は北海道から南は九州まで，まさに全国から集まってきています。

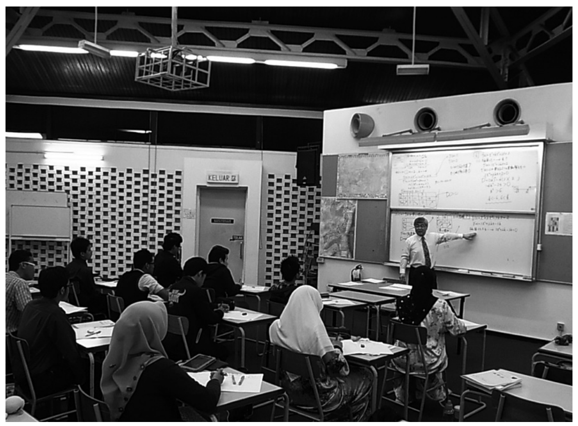
2．日本の数学とマレーシアの数学の違い

マレーシアで数学を教え始めて，まず驚くのが彼らの計算力です。先述しました通りAAJにはマレーシア全国から選ばれた優秀な学生が入学しています。それにも関わらず，計算は遅く，その上計算ミスも非常に多いのです。私も初めは「マレーシアで優秀とはこの程度なのか」と思ってしまいました。しかしそうではありませんでした。ここには日本とマレーシアの数学に対する大きな違いがあるようです。

日本における数学は「学問の中核の一部」という扱いを受けています。小学校のスタート時から算数として授業があり，一部を除いては高校3年まで一貫してカリキュラムに組み込まれています。

しかしマレーシアにおける数学の扱いは全く違っています。かつてAAJで数学を教えられていた五十嵐直樹氏の報告書から抜粋してみます。氏は日本とマレーシアの数学の違いについて次の4点を指摘しています。

(1) As a base of Technology
(2) How to use and how to apply
(3) Treat each problem independently
(4) When they solve the problem, they use scientific calculator



　簡単に説明しますと，数学は「科学や工業の基礎」（1）という立場から，公式については証明よりも「使い方や当てはめ方」（2）に重点が置かれています。そのため「問題は分野ごとに独立して扱われ」（3）ており，結果として「問題を解くときには，関数電卓を使用」（4）しているということです。

　つまり，計算が遅く間違いが多いのは，マレーシアの数学のレベルが低いのではなく，授業中に計算機を使用しているため，日本のように計算機を使わないで数学を解くということに慣れていないためなのです。

　彼らも初等学校では計算機などは使いません。掛け算は日本よりも多く「12×12」までを暗記しています。しかし中等学校からは，数学の時間には計算機を用いて，計算にかかる無駄な時間をできるだけ減らすようにしているようです。

　またマレーシアではコンピュータの使用は数学のカリキュラムの中に含まれています。マレーシアの「数学」という教科は，日本の教科でいえば「数学」と「情報」を合わせたものと思っていただければ分かりやすいと思います。そのため数学の時間の中で関数電卓やコンピュータを積極的に使うように指導されています。

　計算機の使用によって，計算力低下の他にも日本で教育を受けるのはたいへんだろうなと感じることがあります。特に根号の扱いは日本とはまったく違います。AAJで入学したばかりの学生に行っている「基礎学力テスト」を参考に説明したいと思います。

例題①　$\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{48}$

　私たちの求めている解答は $\sqrt{3}$ です。しかしこの問題の正答率は例年20%以下です。学生たちは普段この問題を計算機を用いて解くため，すべての数字を小数で近似して計算します。当然答えも小数で答えます。

$$\sqrt{12}=\sqrt{2\cdot2\cdot3}=2\sqrt{3}$$

などの計算ができず，私たちの求めている解答にはたどりつきません。

例題②　$0.5\left(1-\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

　このような小数，分数，無理数が混在した問題となると，どこから手をつけていいものか分からないらしく，私たちの求めている解答 $\dfrac{4\sqrt{3}-2}{11}$ にたどりついた学生は5年間でわずか4人しかいません。

　そのような学生でも，2年弱の日本式の教育を受けた後には，EJUに合格していくのです。しかも自分の母国語ではない日本語で授業を受けて，合格するほどの実力をつけるのですから，彼らの努力には目を見張るものがあります。オリジナルテキストやEJU試験問題に関しては，また次の機会にお話したいと思います。

マラヤ大学予備教育センター（AAJ）の数学科の取り組みと教員派遣について

成田雅昭

　マレーシアでは，義務教育が小学校6年，中等教育学校（中学校3年，高等学校2年）5年であり，大学に入学するためには，最低1年間の予備教育が必要となる。マレーシアでは，マハティール元首相が提唱したルックイースト政策に基づき，マラヤ大学に日本の大学への留学を目指す予備教育センター（RPKJ：AAJ）を設置し，毎年100名前後の学生を政府奨学生として派遣するものである。留学に際して，日本語の習得を要するため，予備教育は2年間課せられている。日本語レベルとしては，ほとんどの学生はN2レベルをクリアし，数名はN1レベルに該当するようである。

　学生は，中学校から基礎計算については授業において電卓を活用しており，小学校から身近な生活の中に算数・数学が活用されることを重視して学習している。数学的な活動を通して数学的に考えることを重視し，計算は電卓・コンピュータに任せるという学習指導のようである。日本では，数学のよさを日常生活に活用することを大切にし，新しい学習指導要領においては言語活動や体験活動等を重視するため，教科「数学」の目標として，「数学的な活動」や「体系的な理解」，「数学的な考察を表現する能力」，「創造性の基礎」，「数学のよさの認識」，「数学的論拠に基づいて判断する態度」などがキーワードになっている。日本の数学教育の方向性とマレーシアの数学教育は少しずつ同じ方向に向いていくような印象を受ける。

　AAJの学生は，1年生74名，2年生81名である。一方，日本人教員は，日本語科12名，教科（数学7名，物理5名，化学5名）17名，マレー人教員（日本語指導）13名であるから，教員一人当たりの学生数は3.7名であり，手厚い指導体制となっている。日本人教員のうち，日本語科は国際交流基金派遣である。また，教科は文部科学省派遣であり，各都道府県教委を通して募集し書類選考の上，11月中旬に面接をし，派遣教員が決定されている。これまでの３１年間で，４１都道府県から200名を超える教員がAAJの教員として勤務している。教科は，派遣期間が2年間であるため，おおよそ半数の教員が入れ替わる。

　基礎力診断テスト，単元テスト，定期テスト，修了テストなど，すべてのテストにおいて，各問の正答率を集計し，その都度，分析することにより，以後の学習指導に生かしている。このことは，これまでの歴代の担当者がそれぞれノウハウを蓄積し，引き継いでいった成果であると思われる。金曜日（6時間授業）を除くと，1日9時間授業（1時間:50分授業）であり，さらに，科目によっては追試や補習，宿題等があることもあり，各教科で曜日を調整しながら取り組んでいる。日本留学試験（EJU）は6月中旬と11月上旬に実施されるが，8月ごろから各教科別に，クラス単位の授業から習熟度別授業に切り替わる。このような木目細やかな学習指導は，恵まれた教員配置により実現されている。

　学生たちは，小学校の時に受ける全国統一学力テストで好成績をとり，多くは全寮制の中等教育学校に進み，高校2年生の時のSPM（学力統一テ

スト）の成績と進路希望等により，大学進学に向けた予備教育が割り当てられる。AAJにおける学習は，日本の教育課程に対応するため質量ともに学ぶことが多く厳しいものがあるが，熱心に取り組んでいる。2学年の学生全員は来春，日本国内の国立大学工学部に進学する予定である。教員一人当たり数人の学生の進路指導を担当しているが，日本の大学で学んだ後は，将来はマレーシアのために力を発揮したいという志が高く，企業のものづくりの開発部門や，会社経営者や政治家を志している学生もいる。夢と希望に満ち，前途有為な学生の瞳の輝きを間近にしながら日々の教育活動を進めることができることに，我々教員として，日々生きがいを感じている。

全国の数学の教員の方々には，2020年までには先進国の仲間入りをするという国家目標の実現に向けて走っているマレーシアに興味をもっていただき，マレーシア教員派遣の制度に多くの方々から応募いただくよう願っている。

（前北海道札幌東陵高等学校長）

【日本語能力試験認定レベル】

N1：幅広い場面で使われる日本語を理解することができる。

N2：日常的な場面で使われる日本語の理解に加え，より幅広い場面で使われる日本語をある程度理解することができる。

沢畑 雅彦　さわはた まさひこ

茨城県日立市生まれ。茨城大学大学院理学研究科数学専攻修了。
母校である茨城県立日立第一高等学校に勤務して8年目。
2013年4月からマレーシア政府派遣留学生予備教育教員としてマラヤ大学予備教育センターに勤務。

成田 雅昭　なりた まさあき

北海道江別市生まれ。北海道大学大学院工学研究科修了。
前日数教・北海道算数数学研究会高等学校部会長。
2013年３月北海道札幌東陵高等学校長として退職し，４月からマレーシア政府派遣留学生予備教育教員(数学)としてマラヤ大学に勤務。

授業 実践記録

4乗数・5乗数の和の公式を作ってみよう　～階差数列の利用～

山口県立岩国高等学校　西元教善

1．はじめに

自然数の巾の和 $S_n(m)=\sum_{k=1}^{n}k^m$（m は自然数）について，公式として扱うのは，$m=1,\ 2,\ 3$ の場合の $S_n(1)=\frac{1}{2}n(n+1)$，$S_n(2)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$，$S_n(3)=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ である。

$S_n(1)$ は，初項 1，公差 1，項数 n の等差数列の和であるから，等差数列の和の公式を使えば生徒にとっても簡単に求められる。また，等差数列の和の公式を作る際に導入した方法，すなわち，上段には 1 から n までの和，下段には n から 1 までの和を置き，上下に並んだ数の和が一定の $n+1$，それが n 個あることからその和 $n(n+1)$ の半分の $\frac{1}{2}n(n+1)$ であるとして求めることは，実に明快でわかりやすいものである。

それに比べると $m=2$ の証明は唐突な天下り式である。確かに，恒等式 $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ で $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ を代入した式を上から書き並べ，総和をとって計算すれば，左辺は端の 2 項を除いて相殺され，右辺には求める $S_n(2)$ や既知の $S_n(1)$，$\sum_{k=1}^{n}1$（$=S_n(0)$ とする）が出現するので，$S_n(2)$ が求められるわけであるが，生徒にとっては恒等式 $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ の出現は青天の霹靂である。

$S_n(2)$ はこんな手段で求めるものと受け入れればそれでもよいが，これを少し違った視点から求められないかと考える生徒が出て欲しいものである。先達の整理した見事な方法を習得するのも勉強であるが，自らが拙い方法ではあるが（再）発見するのも勉強である。私は，後者の方が数学教育的効果は大きいのではないかと思う。なぞってわかったりできることよりも，自らわかったりできたりすることの方が，感動が大きく，数学学習は再発見で進展するといっても過言ではないからである。

2．ねらい～発見という感動，喜びをエネルギーにする数学教育～

1．で述べた $S_n(1)$，$S_n(2)$，$S_n(3)$ は教科書でも扱っており，それは既に確立された数学的事実である。学習者である生徒はこれを追体験するわけである。その追体験を受動的に学習するか，再発見として主体的に学習するかでは学習の意義やその効果が大きく違ってくると思う。

特に，教科書には掲載されていないような学習をすれば，なおさら（再）発見という感動があり，数学に対する学習意欲にも拍車がかかってくるのではなかろうか。字面を追って「なるほど」と思う納得もあれば，岡潔的に言えば「（再）発見という（鋭い）喜び」もある。（注：岡潔は「発見という鋭い喜び」と表現している）

3．自然数の巾の和～教科書での方法～

自然数の巾の和については，どの教科書でも判で押したように，連続する自然数の巾の差で求めている。つまり，$(k+1)^m-k^m=$（次数が $m-1$ 以下の k の整式）を活用している。この方法は確かにうまい方法である。$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ とした n 個の等式の総和をとれば，左辺では，いわゆる「中抜け現象」という相殺によって，$(n+1)^m-1$ になる。これは数列の和を求めるときに有効な手段である。

右辺には求めたい $S_n(m-1)$ と既に求めてある $S_n(l)$（$l=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m-2$）が出現する。ここからが少し面倒な計算になるが，ともかく $S_n(m-1)$ が求められる。

このことをまとめると，二項定理から，

$$(k+1)^m-k^m=\sum_{r=0}^{m-1}{}_m\mathrm{C}_r k^r \quad \cdots\cdots①$$

したがって，$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^m-k^m\}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=0}^{m-1}{}_m\mathrm{C}_r k^r$

である。

よって，$m\geqq 2$ のとき，

$$(n+1)^m-1=\sum_{r=0}^{m-1}{}_m\mathrm{C}_r S_n(r)$$

$$={}_m\mathrm{C}_{m-1}S_n(m-1)+\sum_{r=0}^{m-2}{}_m\mathrm{C}_r S_n(r)$$

である。

したがって，

$$S_n(m-1)=\frac{1}{m}\left\{(n+1)^m-\sum_{r=0}^{m-2}{}_m\mathrm{C}_r S_n(r)-1\right\} \quad \cdots\cdots②$$

となる。

特に，$m=3$ のとき，

$$\left.\begin{aligned}
S_n(2)&=\frac{1}{3}\left\{(n+1)^3-\sum_{r=0}^{1}{}_3\mathrm{C}_r S_n(r)-1\right\}\\
&=\frac{1}{3}\{(n^3+3n^2+3n+1)\\
&\qquad -S_n(0)-3S_n(1)-1\}\\
&=\frac{1}{3}\left\{n^3+3n^2+3n+1-n\right.\\
&\qquad \left.-3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-1\right\}\\
&=\frac{1}{3}\{(n^3+3n^2+2n)\\
&\qquad -\frac{3}{2}n(n+1)\}\\
&=\frac{1}{6}\{2n(n+1)(n+2)\\
&\qquad -3n(n+1)\}\\
&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots③$$

②において，$m=2$ のとき $S_n(1)=\frac{1}{2}n(n+1)$ である。また，②から $l(\geqq 2)$ のとき，$m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ l-2$ のすべてについて $S_n(m)$ が求められれば $m=l-1$ のときにも $S_n(m)$ が求められる。よって，数学的帰納法より，すべての $S_n(m)$ が求められる。

4．自然数の巾の和の発見学習 ～教科書レベル～

さて，**3．**で述べた教科書流の展開によっても追体験による発見的学習は可能である。これは正統的な展開といえるだろう。これを楽しく，面白く感じる生徒もいる。大いに結構なことである。ただ，これを苦手とする生徒も当然いる。このような生徒に対し，どのようにしたら興味・関心をもって自然数の巾の和を考えてくれるだろうか？いきなり天下り式に①を持ち出すことなく，発見的に自然数の巾の和を求められないだろうか，しかも既習事項である「等差数列」「階差数列」を使って，③のような面倒な計算を避けて，$S_n(4)$，$S_n(5)$ まで求められないだろうか，と考えた。一見ランダムに見える数の並びに規則性を見つけるという発見活動から始めると，教科書の展開とは異なった学習が可能になるからである。

まず，公式として今後は知っておかなければならない

$$S_n(1)=\frac{1}{2}n(n+1),$$

$$S_n(2)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

$$S_n(3)=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

について，次のような展開をしてみる。

表 1 のように数列 $\{n\}$ を最上段に書き，その下に順に数列 $\{S_n(1)\}$，$\{S_n(2)\}$，$\{S_n(3)\}$ を書く。それぞれ，初項から第6項までぐらいを書き込めるようにしておく。

ここで，$S_n(m)=\sum_{k=1}^{n}k^m=1^m+2^m+3^m+\cdots\cdots+n^m$

である。

$S_n(1)=\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n$ （自然数の和）

$S_n(2)=\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots n^2$ （平方数の和）

$S_n(3)=\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots n^3$ （立方数の和）

$\{n\}$：	1,	2,	3,	4,	5,	6,	…
$\{S_n(1)\}$：							
$\{S_n(2)\}$：							
$\{S_n(3)\}$：							

（表 1）

次に，この表を完成させる。（表 2）

$\{n\}$：	1,	2,	3,	4,	5,	6,	…
$\{S_n(1)\}$：	1,	3,	6,	10,	15,	21,	…
$\{S_n(2)\}$：	1,	5,	14,	30,	55,	91,	…
$\{S_n(3)\}$：	1,	9,	36,	100,	225,	441,	…

（表 2）

ここで，生徒に気付きを述べさせてみる。$\{S_n(1)\}$，$\{S_n(2)\}$について，気を回して階差数列まで考える生徒もいるだろうが，「一般項はわからなくてもいいから，$\{S_n(1)\}$，$\{S_n(2)\}$，$\{S_n(3)\}$ の間に何か "**関係**" はないか」と質問をすると，多くの生徒が $\{S_n(1)\}$ と $\{S_n(3)\}$にある関係を発見するだろう。（表 3）

$\{S_n(1)\}$：	1,	3,	6,	10,	15,	21,	…
$\{S_n(3)\}$：	1,	9,	36,	100,	225,	441,	…
	1^2,	3^2,	6^2,	10^2,	15^2,	21^2,	…

（表 3）

その関係とは $S_n(3)=\{S_n(1)\}^2$ である。これより，(立方数の和)＝(自然数の和)^2 という数学的イメージが具体的な数字を通して形成される。具体性のもつ説得力は数学の苦手な生徒にとっては大切である。

$\{S_n(1)\}$ については，①等差数列の和の公式を使って求める，②階差数列で求めるという方法が考えられる。その方が素直な発想，展開であろうが，ここではあとのことを考慮して，③数列$\{S_n(1)\}$の上にある数列 $\{n\}$ で各項を割ってできる数列 $\dfrac{S_n(1)}{n}$ を考えさせる。（表 4）

$\{n\}$：	1,	2,	3,	4,	5,	6,	…
$\{S_n(1)\}$：	1,	3,	6,	10,	15,	21,	…
$\dfrac{S_n(1)}{n}$：	1,	$\dfrac{3}{2}$,	2,	$\dfrac{5}{2}$,	3,	$\dfrac{7}{2}$,	…

（表 4）

最下段の数字の並びから，それが初項 1，公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列であることを見抜くのは簡単である。

すると，これから $\dfrac{S_n(1)}{n}=1+(n-1)\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}(n+1)$

すなわち $S_n(1)=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ であることがわかる。

等差数列の和の公式，階差数列を使わなくても等差数列から自然数の和が求められることは生徒にとっては意外性を感じさせる。和は等差数列を一歩進めて初めて求められるものという煩わしさを感じていることが苦手な生徒には多いからである。数列を学習するとき，特に苦手な生徒が学習するとき，初歩の段階では数列を書き並べて眺めてみる，そこに何らかの規則，パターンが見つけられないか考えさせるとよいだろう。この場合，表にしたのもそういった背景がある。

また，先ほどの (立方数の和)＝(自然数の和)^2 から $S_n(3)=\{S_n(1)\}^2=\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ となる。

では，次に $\{S_n(2)\}$ をこのような方法で求めさせる。今度は表 2 の 2 段目と 3 段目に着目させ，今行ったように，下の各項を上の各項で割った数列を考えさせる。（表 5）

$\{S_n(1)\}$：	1,	3,	6,	10,	15,	21,	…
$\{S_n(2)\}$：	1,	5,	14,	30,	55,	91,	…
$\dfrac{S_n(2)}{S_n(1)}$：	1,	$\dfrac{5}{3}$,	$\dfrac{7}{3}$,	3,	$\dfrac{11}{3}$,	$\dfrac{13}{3}$,	…

（表 5）

最下段の数字の並びから，それが初項 1，公差 $\dfrac{2}{3}$ の等差数列であることを見抜くのは簡単である。すると，これから

$$\frac{S_n(2)}{S_n(1)}=1+(n-1)\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}(2n+1)$$

すなわち，$S_n(2)=\dfrac{1}{3}S_n(1)(2n+1)$

$S_n(1)=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ であるから，

$$S_n(2)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

であることがわかる。これは**3．**の③の計算に比べれば簡単である。実際，③の計算を誤る生徒が結構いる。

さて，ここまで $\{S_n(1)\}$，$\{S_n(2)\}$，$\{S_n(3)\}$ を求めてきたが，教科書とは方針を異にする発見学習である。「ちょっと高飛車的な導入ですがこういうようにやれば求められるでしょう。」というスマートな方法ではなく，泥臭くいくつかの数を書

き並べ，その数をいじってなんとか求めやすくした方法といえる。

　このように書かれた数を眺めて，その並びのパターンを見出す，あるいは２つの数列から第３の数列を考えると結構簡単に求められるという展開が，生徒の興味・関心を引き，印象に残るのではないかと思う。

5．自然数の巾の和の発見的学習 〜発展レベル〜

　では，発展レベルとして$S_n(4)$，$S_n(5)$，つまり，４乗数の和，５乗数の和を求める。表２をさらに拡張する。（表６）

$\{n\}$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	…
$\{S_n(1)\}$	1,	3,	6,	10,	15,	21,	…
$\{S_n(2)\}$	1,	5,	14,	30,	55,	91,	…
$\{S_n(3)\}$	1,	9,	36,	100,	225,	441,	…
$\{S_n(4)\}$	1,	17,	98,	354,	979,	2275,	…
$\{S_n(5)\}$	1,	33,	276,	1300,	4425,	12201,	…

（表６）

このようにたくさんの数字が並ぶと，どれとどれを関連付ければよいか生徒も迷うので，ある程度の絞り込みを行っておく方がよい。たとえば，①$S_n(2)$と$S_n(4)$，②$S_n(3)$と$S_n(5)$のような組合せを考えさせる。これらにおいて，表５のようにそれぞれの３段目に上の数列の各項で下の数列の各項を割った数列$\left\{\dfrac{S_n(4)}{S_n(2)}\right\}$，$\left\{\dfrac{S_n(5)}{S_n(3)}\right\}$を書き込んでいく。（表７，８）

$\{S_n(2)\}$：	1,	5,	14,	30,	55,	91,	…
$\{S_n(4)\}$：	1,	17,	98,	354,	979,	2275,	…
$\left\{\dfrac{S_n(4)}{S_n(2)}\right\}$：	1,	$\dfrac{17}{5}$,	7,	$\dfrac{59}{5}$,	$\dfrac{89}{5}$,	25,	…

（表７）

$\{S_n(3)\}$：	1,	9,	36,	100,	225,	441,	…
$\{S_n(5)\}$：	1,	33,	276,	1300,	4425,	12201,	…
$\left\{\dfrac{S_n(5)}{S_n(3)}\right\}$：	1,	$\dfrac{11}{3}$,	$\dfrac{23}{3}$,	13,	$\dfrac{59}{3}$,	$\dfrac{83}{3}$,	…

（表８）

　表７，８のいずれにおいても表５のように，３段目の数列が即座にどのような数列であるかは判断しづらい。

そこで，階差をとるという方法をそれぞれにとってみる。

　ここで，数列$\left\{\dfrac{S_n(4)}{S_n(2)}\right\}$，$\left\{\dfrac{S_n(5)}{S_n(3)}\right\}$の階差数列をそれぞれ$\{T_n(2,\ 4)\}$，$\{T_n(3,\ 5)\}$とすると，

$$\{T_n(2,\ 4)\}:\ \frac{12}{5},\ \frac{18}{5},\ \frac{24}{5},\ \frac{30}{5},\ \frac{36}{5},\ \cdots$$

$$\{T_n(3,\ 5)\}:\ \frac{8}{3},\ \frac{12}{3},\ \frac{16}{3},\ \frac{20}{3},\ \frac{24}{3},\ \cdots$$

である。

　$\{T_n(2,\ 4)\}$は初項$\dfrac{12}{5}$，公差$\dfrac{6}{5}$の等差数列であるから，$T_n(2,\ 4)=\dfrac{12}{5}+(n-1)\cdot\dfrac{6}{5}=\dfrac{6}{5}(n+1)$

　よって，$n\geqq 2$のとき，

$$\frac{S_n(4)}{S_n(2)}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{6}{5}(k+1)=1+\frac{6}{5}\left(\sum_{k=1}^{n}k-1\right)$$
$$=1+\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{6}{5}$$
$$=\frac{1}{5}(3n^2+3n-1)$$

である。これは$n=1$のときにもなりたつので，

$$\frac{S_n(4)}{S_n(2)}=\frac{1}{5}(3n^2+3n-1)$$

である。

　したがって，

$$S_n(4)=\frac{1}{5}S_n(2)(3n^2+3n-1)$$
$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$
$$=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

である。

　$\{T_n(3,\ 5)\}$は初項$\dfrac{8}{3}$，公差$\dfrac{4}{3}$の等差数列であるから，$T_n(3,\ 5)=\dfrac{8}{3}+(n-1)\cdot\dfrac{4}{3}=\dfrac{4}{3}(n+1)$

　よって，$n\geqq 2$のとき，

$$\frac{S_n(5)}{S_n(3)}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{4}{3}(k+1)=1+\frac{4}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}k-1\right)$$
$$=1+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{4}{3}$$
$$=\frac{1}{3}(2n^2+2n-1)$$

である。これは$n=1$のときにもなりたつので，

$$\frac{S_n(5)}{S_n(3)}=\frac{1}{3}(2n^2+2n-1)$$

である。

　したがって，

$$S_n(5)=\frac{1}{3}S_n(3)(2n^2+2n-1)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$$
$$=\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$$

である。

　$S_n(3)$については，$S_n(3)=\{S_n(1)\}^2=\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

であることは既に調べてあるが，

$$\left\{\frac{S_n(3)}{S_n(1)}\right\}:1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ \cdots$$

の階差数列$\{T_n(1,\ 3)\}$が，

$$\{T_n(1,\ 3)\}:2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \cdots$$

であることから，$T_n(1,\ 3)=n+1$

　よって，$n\geqq 2$のとき，

$$\frac{S_n(3)}{S_n(1)}=1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

である。

　これは$n=1$のときにもなりたつので，

$$\frac{S_n(3)}{S_n(1)}=\frac{1}{2}n(n+1)$$

である。

　したがって，

$$S_n(3)=\frac{1}{2}S_n(1)n(n+1)=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

である。

　ここまで，$\left\{\dfrac{S_n(m+2)}{S_n(m)}\right\}$ $(m=1,\ 2,\ 3)$を考えたが，その階差数列$\{T_n(m,\ m+2)\}$は，$p(n+1)$（pは正の定数）となっている。

6．実践のようす

　今回の実践は，第２回考査（第１学期期末考査）終了後の7月初旬に行った。本校は，2学期制の単位制高校（理数科1クラス，普通科7クラス）であり，65分授業を実施（実践当時，現在は50分授業）しているので，その時間に合わせた展開をするための「プリント」を事前に作成していたが，ちょうどその実施日というのは，文化祭の準備期間の短縮授業日（55分授業）に当たったために，予定より10分減で実施した。

　なお，55分の時間の振り分けは次のとおりである。

①事前説明　11：05〜11：10（5分）
②個人探究　11：10〜11：30（20分）
③グループ探究　11：30〜11：55（25分）
④感想記入　11：55〜12：00（5分）

　上は，②個人探究のようすである。

　当初の予定では，②③の時間がそれぞれ+5分の25分，30分であったことを付け加えておく。

●配布の冊子について

　生徒には，指示された流れで４乗数・５乗数の和の公式が導けるように構成した「４乗数・５乗数の和の公式を作ってみよう（階差数列の利用）」という両面刷り5ページの冊子を配布した。
（**8．**配布したプリントを参照のこと）

　構成は，１．はじめに，２．和を数列として，３．４乗数の和$S_n(4)$と５乗数の和$S_n(5)$を求めよう，４．まとめ【感想】である。

●生徒のようす

　これまで，このクラス（理数科1クラスのためクラス替えなし）では「ベストアングルポイントを探せ（作図問題）（次期教育課程数学Ａの事前実践〜課題学習 作図〜，啓林館 授業実践記録2010年3月）」と「「正接定理」を作ってみよう（生徒の疑

問を活かした実践 ―正接定理をつくろう―，啓林館 授業実践記録2013年1月)」という実践を今回の実践と同様の構成で，1年次に行っている。まず，個人探究で考えさせ，うまく解決できなかったら各自のアイデアを持ち寄って，5人程度までのグループで解決させた。自分だけでは解決できなくても「3人寄れば文殊の智慧」といった生徒の感想もあったように，グループでの探究に楽しさや発見の喜びを感じていた。今回は，それまでとは違って，作業的な穴埋めもあり，目標に向かっての方向性も示してあるので，それを感じて個人的に最後まで頑張ろうとする生徒が多かった。ただ，計算ミスをする生徒も少なくなかったので，事前に用意しておいた解答で数値を読み上げて確認をさせた。

●生徒の感想

最後のページに設けておいた感想欄の記述から，今回の実践については①このような発想で４乗数・５乗数の和が求められることへの驚きや不思議さ，②計算は面倒であったが規則性に気付いたときの感動，③数学への関心の高まりがあったようである。

感想をいくつか列挙する。

(1) 最初は何をすればよいのか戸惑ったが，規則性が見つかったときはうれしかった。そこからは計算ばかりだったけど，結果が出たときは**驚いた**。

(2) 考え方は理解できたけど，**計算が大変**でなかなか公式が導き出せませんでした。

(3) 公式を求めるだけでも**違うアプローチの方法で求めることができる**のだなと思った。

(4) 階差数列を利用して知らない公式を作り出すことができることに**数学の内容のつながり**を感じた。

(5) 今まで求められないと思っていた４乗数の和や５乗数の和の公式が，**いろいろなものを組み合わせて考えること**で求めることができたので**驚き**ました。

(6) ところどころ難しかったが楽しかった。意外と**使える公式**かも知れないと思った。

(7) 最初はこんなに難しいことはできるわけないと思ったけれど，このプリントの**手順を踏んで**いったら何となくできてきた。

(8) 最初は面倒そうに思えたが，順を追って計算するとこんなにも**きれいな結果**が出てきて**興奮**した。

(9) 階差数列を使って４乗数や５乗数の和の公式を出せて**面白かった**です。階差数列に少し**興味**は湧きました。時間があればぜひ他の方法でも考えてみたいと思いました。数学って**美しい**なと思いました。

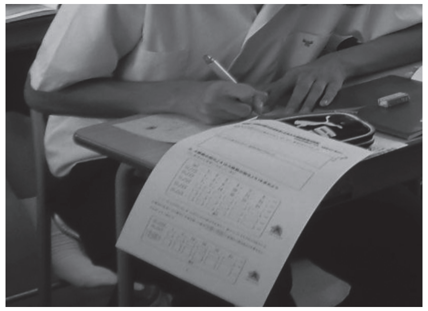
(10) 全体的にとても**楽しめた**。自分からこの公式を導き出すのは難しいけれど，導かれながらであったので，すらすらできて面白かった。いろいろな法則も見えてきて，より**関心**が高くなった。個人的にもこういうことは好きなので，またやってみたい。

(11) 自然数の和の公式から階差数列などを利用して，４乗数･５乗数の和の公式が導けることが分かって何か**不思議な気持ち**になりました。(難しかったです…)

(12) 今まで習った知識で計算していっても公式が確認でき感動した。考え方をいろいろ変えていくと難しい問題も解けそうな気がしてきて，数学にとても**興味**が湧いた。

(13) ４乗，５乗だけでなく，もっと数を大きくしても n の式で表されると思うととても**不思議でおもしろい**ことです。ここに数学の本質があると思いました。

(14) 数学Bの授業では，立方数の和の公式までしか習わなかったが，今回自分で４･５乗数の和の公式を作ってみると，思ったほど複雑ではなかった。また，これまでに習った平方数の和，立方数の和の公式も公式に取り込まれているために覚えるのも容易であると思った。



7．まとめ

計算は大変であったようであるが，楽しめて，驚きを与える題材であったようである。

感想の中の最後（14）では，得られた結果についての深い考察が伺える。これも私としてのねらいの一つであったのであるが，平方数（2 乗数），4 乗数の和の公式ではその因数に共通に $n(n+1)(2n+1)$ があり，立方数（3 乗数），5 乗数の和の公式にはその因数に共通に $n^2(n+1)^2$ があることに加え，4 乗数・5 乗数の和の公式の因数 $3n^2+3n-1$，$2n^2+2n-1$ の中に関係性を見出している。

計算の段階でミスをする者，階差数列からもとの数列の一般項を求める方法を忘れている者，またその計算に四苦八苦するもの，どうにか誘導で最終結果に至れる者，その結果を分析できる者のように生徒のレベルも多様である中での実践であったが，それぞれのレベルにおいて得るものがあったと確信する。

8．配布したプリント

1．はじめに

復習：これまでに，次のことを学習しています。

自然数の和の公式　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ ……①

平方数(2乗数)の和の公式　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ ……②

立方数(3乗数)の和の公式　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ ……③

①の「自然数の和」は，初項1，公差1，項数 n の等差数列の和ですから，等差数列の和の公式を使えば簡単に求められます。あるいは，上段には1から n までの和，下段には n から1までの和を置き，上下に並んだ数の和が一定の $n+1$，それが n 個あることからその和 $n(n+1)$ の半分としても求められます。

それに比べて②，③はどうでしょう。②の「平方数の和」では恒等式 $(k+1)^3-k^3=3\underline{k^2}+3k+1$ が突如出現して，$k=1, 2, 3, \cdots, n$ を代入した式を上から書き並べ，総和をとって算出します。

また，③の「立方数の和」では，同様に恒等式 $(k+1)^4-k^4=4\underline{k^3}+6k^2+4k+1$ に，$k=1, 2, 3, \cdots, n$ を代入した式を上から書き並べ，総和をとって算出します。

この考えを一般化すれば，二項定理により，

恒等式 $(k+1)^{m+1}-k^{m+1}={}_{m+1}C_1k^m+{}_{m+1}C_2k^{m-1}+\cdots+{}_{m+1}C_mk+1=(m+1)\underline{k^m}+\dfrac{(m+1)m}{2}k^{m-2}+\cdots+(m+1)k+1$

が成り立つので，これから「m 乗数の和」$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^m=1^m+2^m+3^m+\cdots+n^m$ を求めることができます。

これは，確かに素晴らしい着眼ですが，これを少し違った視点から見ることもできます。

2．和を数列として

さて，ここで $\displaystyle S_n(m)=\sum_{k=1}^{n}k^m$ とおきます。つまり，$S_n(m)$ は $1^m=1$ から n^m までの m 乗数の和です。

ここで，数列 $\{S_n(2)\}$, $\{S_n(3)\}$ の初項から第6項までを求めて，表1を完成してみましょう。

なお，$\{S_n(1)\}$ については，$S_1(1)=1$，$S_2(1)=1+2=3$，$S_3(1)=1+2+3=6$，$S_4(1)=1+2+3+4=10$，$S_5(1)=1+2+3+4+5=15$，$S_6(1)=1+2+3+4+5+6=21$ です。

$\{n\}$:	1,	2 ,	3 ,	4 ,	5 ,	6 ,	…
$\{S_n(1)\}$:	1,	3 ,	6 ,	10 ,	15 ,	21 ,	…
$\{S_n(2)\}$:	1,	□,	□,	□,	□,	□,	…
$\{S_n(3)\}$:	1,	□,	□,	□,	□,	□,	…

表１

ここで，何か気付くことはありませんか。 $\{S_n(1)\}$, $\{S_n(3)\}$ の間に何か“**関係**”はないでしょうか。
表2を完成させてみましょう。

$\{S_n(1)\}$:	1 ,	3 ,	6 ,	10 ,	15 ,	21 ,	…
$\{S_n(3)\}$:	$\square^2$,	$\square^2$,	$\square^2$,	$\square^2$,	$\square^2$,	$\square^2$,	…

表2

←うめてみよう

これより，$S_n(3)=\{S_n(1)\}^2$ つまり（立方数の和）＝（自然数の和）^{2} ということがわかります。

次に，表1で数列 $\{S_n(1)\}$ の上にある数列 $\{n\}$ で各項を割ってできる数列 $\left\{\dfrac{S_n(1)}{n}\right\}$ を考え，表3に初項から第6項まで書いてみましょう。

$\{n\}$:	1 ,	2 ,	3 ,	4 ,	5 ,	6 ,	…
$\{S_n(1)\}$:	1 ,	3 ,	6 ,	10 ,	15 ,	21 ,	…
$\left\{\dfrac{S_n(1)}{n}\right\}$:	□,	□,	□,	□,	□,	□,	…

表3

←うめてみよう

質問　数列 $\left\{\dfrac{S_n(1)}{n}\right\}$ はどんな数列ですか？　また，その一般項を求めてみましょう。

さらに，それから数列 $\{S_n(1)\}$ の一般項を求めてみましょう。

では，次にこのような方法で $\{S_n(2)\}$ の一般項を求めてみましょう。今度は表1の2段目と3段目に着目して，今行ったように，下の各項を上の各項で割った数列を考えてみましょう。（表4）

$\{S_n(1)\}$:	1 ,	3 ,	6 ,	10 ,	15 ,	21 ,	…
$\{S_n(2)\}$:	1 ,	5 ,	14 ,	30 ,	55 ,	91 ,	…
$\left\{\dfrac{S_n(2)}{S_n(1)}\right\}$:	□,	□,	□,	□,	□,	□,	…

表4

←うめてみよう

質問 数列 $\left\{\dfrac{S_n(2)}{S_n(1)}\right\}$ はどんな数列ですか？ また，その一般項を求めてみましょう。

さらに，それから数列 $\{S_n(2)\}$ の一般項を求めてみましょう。

3．4乗数の和 $S_n(4)$ と5乗数の和 $S_n(5)$ を求めよう

では，表1をさらに拡張してみましょう。（表5）

$\{n\}$:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	…
$\{S_n(1)\}$:	1,	3,	6,	10,	15,	21,	…
$\{S_n(2)\}$:	1,	5,	14,	30,	55,	91,	…
$\{S_n(3)\}$:	□,	□,	□,	□,	□,	□,	…
$\{S_n(4)\}$:	□,	□,	□,	□,	□,	□,	…
$\{S_n(5)\}$:	□,	□,	□,	□,	□,	□,	…

表5

←うめてみよう

ここで，① $S_n(2)$ と $S_n(4)$，② $S_n(3)$ と $S_n(5)$ の組合せを考えて，表4のようにそれぞれの3段目に上の数列の各項で下の数列の各項を割った数列 $\left\{\dfrac{S_n(4)}{S_n(2)}\right\}$，$\left\{\dfrac{S_n(5)}{S_n(3)}\right\}$ の初項から第6項までを書き込んでみましょう。（表6,7）

$\{S_n(2)\}$:	1,	5,	14,	30,	55,	91,	…
$\{S_n(4)\}$:	□,	□,	□,	□,	□,	□,	…
$\left\{\dfrac{S_n(4)}{S_n(2)}\right\}$:	□,	□,	□,	□,	□,	□,	…

表6

←うめてみよう

$\{S_n(3)\}$:	□,	□,	□,	□,	□,	□,	…
$\{S_n(5)\}$:	□,	□,	□,	□,	□,	□,	…
$\left\{\dfrac{S_n(5)}{S_n(3)}\right\}$:	□,	□,	□,	□,	□,	□,	…

表7

←うめてみよう

次に，数列 $\left\{\dfrac{S_n(4)}{S_n(2)}\right\}$，$\left\{\dfrac{S_n(5)}{S_n(3)}\right\}$ の**階差数列**をとってみよう。それぞれ $\{T_n(2,4)\}$，$\{T_n(3,5)\}$ として，表8に初項から第5項まで書き込んでみよう。

$\{T_n(2,4)\}$:	□,	□,	□,	□,	□,	…
$\{T_n(3,5)\}$:	□,	□,	□,	□,	□,	…

表8

←うめてみよう

$\{T_n(2,4)\}$ は初項□，公差□の等差数列であるから，$T_n(2,4)=$□

よって，$n\geqq2$ のとき，$\dfrac{S_n(4)}{S_n(2)}=$□

これは $n=1$ のときにもなりたつので，$\dfrac{S_n(4)}{S_n(2)}=$□です。

したがって，$S_n(4)=$□$S_n(2)$□
定数　　nの式

$=$□ ←$S_n(2)$は求めています

$=$□

$\{T_n(3,5)\}$ は初項□，公差□の等差数列ですから，$T_n(3,5)=$□です。

よって，$n\geqq2$ のとき，$\dfrac{S_n(5)}{S_n(3)}=$□

これは $n=1$ のときにもなりたつので，$\dfrac{S_n(5)}{S_n(3)}=$□です。

したがって，$S_n(5)=$□$S_n(3)$□……(＊)です。
定数　　nの式

$S_n(3)$ については，$S_n(3)=\{S_n(1)\}^2=\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ であることは既に知っていますが，

$\left\{\dfrac{S_n(3)}{S_n(1)}\right\}$: □, □, □, □, □, □, … の階差数列 $\{T_n(1,3)\}$ が，

$\{T_n(1,3)\}$: □, □, □, □, □, … であることから，$T_n(1,3)=$□です。

よって，$n\geqq2$ のとき，$\dfrac{S_n(3)}{S_n(1)}=$□です。

これは $n=1$ のときにもなりたつので，$\dfrac{S_n(3)}{S_n(1)}=$□です。

したがって，$S_n(3)=$□$S_n(1)$□$=$□です。

すると，(＊)より $S_n(5)=$□$S_n(3)$□$=$□となります。

4．まとめ

$S_n(4)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^4=1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=$□ **(4乗数の和の公式)**

$S_n(5)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^5=1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5=$□ **(5乗数の和の公式)**

【感想】

西元 教善　にしもと のりよし

山口県生まれ。
広島大学理学部数学科卒業。
広島大学大学院教育学研究科教科教育学専攻(数学教育)修了。
山口県立防府高校，下松高校を経て現在岩国高校勤務。教員歴32年。修士論文でテーマとした数学学習における「理解」の研究を30余年継続中。読売教育賞最優秀賞・優秀賞受賞。
著書：数学学習における「理解」の構造他9冊。
長女(大学1年)と広島カープの応援に熱狂中。

複素数平面の効果的指導について（その1）

Focus Gold・Focus Up
編集委員
豊田 敏盟
Toshiaki Toyoda

新教育課程「数学Ⅲ」の指導を前に，若い数学担当の先生から複素数平面の授業展開や受験指導にやや不安があるとの声を聞きます。それは，高校生の頃にこの単元の授業や受験指導を受けていないからかもしれません。

そこで啓林館では，次年度の入試から加わる「整数の性質」と「複素数平面」の指導に関する講演会「東北数学フォーラム」を，3月9日，仙台市で開催することとなり，「整数の性質」は名城大学准教授竹内英人先生が，「複素数平面」は当方がお話しさせていただくことになりました。

本稿は，そのフォーラムでの「複素数平面の効果的な指導」に関する資料の一部に説明を加えたものです。また，本稿をフォーラム開催の前に執筆しており，東北数学フォーラムでの参加者の意見を併載できないことをご了承ください。

1．複素数平面の指導目標の要点

「数学Ⅱ」で複素数を定義し，実数と虚数を加えた複素数の性質を導入しました。そして，「数学Ⅱ」の単元「図形と方程式」では直線や円の方程式，軌跡と領域を，「数学B」でベクトルを指導します。さらに，「数学Ⅲ」の「平面上の曲線」でいろいろな曲線や極座標を扱った後，「複素数平面」に入る流れになります。一方，新課程で「数学C」の単元「行列とその応用」が削除されましたので，「行列」の中の点の回転をこの「複素数平面」で扱うことになります。

以上を踏まえ，「複素数平面」の指導目標を列挙すると次のようになります。

(1) 複素数 z の実数条件 $(z=\overline{z},\ \arg z=0,\ \pi)$，純虚数条件 $\left(z\neq0 \text{ で } z=-\overline{z},\ \arg z=\pm\dfrac{\pi}{2}\right)$ の意味を理解し，利用できる。

(2) 複素数の和・差・実数倍・絶対値・平行移動・2点間の距離・内分点外分点等の図形的意味をベクトルと関連づけて理解し，それぞれの公式や考え方を利用できる。

(3) 複素数の極形式・積・商の図形的意味を理解し，それぞれの公式や考え方を利用できる。

(4) ド・モアブルの定理を理解し，その有効性を活用できる。複素数の n 乗根が求められ，n 乗根の図形的意味を理解する。

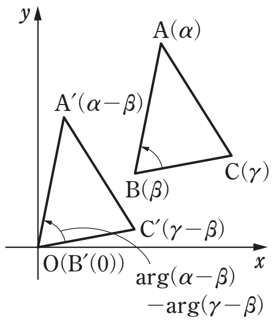
(5) 複素数平面における，点のまわりの回転・2直線のなす角・同一直線上の点の条件・垂直条件・三角形の相似条件の図形的意味を理解し，それぞれの公式や考え方を利用できる。

(6) 直線・円の方程式を複素数の式で表せる。複素数平面における軌跡・変換の意味を理解し，それぞれを解析して式で表せる。

2．複素数平面の指導例

複素数平面上の点 $P(z)$ の複素数 z は，原点を基準とする点Pの位置を表すので，原点Oを始点とする位置ベクトルの終点と同じように考えられます。ですから，複素数平面上の点 $A(\alpha)$，$B(\beta)$ に対して点 $C(\beta-\alpha)$ は原点を始点とし，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$ であるベクトルの終点Cを表します。このことが理解できれば，$\beta-\alpha$ や $m\alpha+n\beta$ は原点から見てどのような点を表すのかが容易にわかります。つまり，指導目標（2）はベクトルとの対比で導入するとよいと思います。

さて，A(α)，B(β)，C(γ) である次の △ABC において，∠ABC や∠CAB は arg（偏角）でどのように表せるのか考えてみましょう。



反時計まわりに計る角は正の角，時計まわりに計る角は負の角ですから，∠ABC（正の角）は頂点 B を原点 O と考え，A′($\alpha-\beta$) の偏角から C′($\gamma-\beta$) の偏角を引けばよいことがわかります。

つまり，$\angle ABC=\arg(\alpha-\beta)-\arg(\gamma-\beta)$ となり，$\angle ABC=\arg(\alpha-\beta)-\arg(\gamma-\beta)$

$$=\arg\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}$$

です。

同様に，$\angle CAB=\arg(\gamma-\alpha)-\arg(\beta-\alpha)$

$$=\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$$

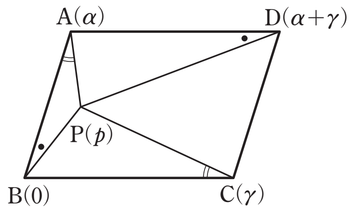
です。

それでは，複素数平面に関する大学入試予想問題を解説しながら，これらの考え方の活用を考察してみましょう。

次の【問題1】はユークリッド幾何の問題（新課程では「数学A」）で，補助線の引き方が課題です。でも，なかなか思いつかない。そこで，複素数平面を利用して証明してみましょう。

【問題1】

平行四辺形 ABCD の内部に，点 P を∠BAP＝∠BCP であるように定めれば，∠ABP＝∠ADP となることを証明せよ。



【複素数平面を利用しての略解】

複素数平面上の原点に点 B を定め，点 A，C，P の位置をそれぞれ複素数 α，γ，p とすると，点 D の位置は $\alpha+\gamma$ となる。

∠BAP＝∠BCP より，

$$\arg\frac{p-\alpha}{0-\alpha}=\arg\frac{0-\gamma}{p-\gamma}\quad\cdots\cdots①$$

①を変形すると，

$$\arg\frac{p-\alpha}{-\alpha}-\arg\frac{-\gamma}{p-\gamma}=\arg\left(\frac{\frac{p-\alpha}{-\alpha}}{\frac{-\gamma}{p-\gamma}}\right)$$

$$=\arg\left(\frac{p-\alpha}{-\alpha}\cdot\frac{p-\gamma}{-\gamma}\right)=\arg\frac{p^2-(\alpha+\gamma)p+\alpha\gamma}{\alpha\gamma}=0$$

よって，$\dfrac{p^2-(\alpha+\gamma)p+\alpha\gamma}{\alpha\gamma}=k$（実数）とおける。

（ここで，複素数 z が実数 $\Longleftrightarrow \arg z=0,\ \pi$

複素数 z が純虚数 $\Longleftrightarrow \arg z=\pm\dfrac{\pi}{2}$）

この式から，$p^2-(\alpha+\gamma)p=(k-1)\alpha\gamma$ ……①′

次に，$\angle ABP-\angle ADP=\arg\dfrac{\alpha}{p}-\arg\dfrac{p-(\alpha+\gamma)}{\alpha-(\alpha+\gamma)}$

$$=\arg\left(\frac{\frac{\alpha}{p}}{\frac{p-(\alpha+\gamma)}{-\gamma}}\right)=\arg\frac{-\alpha\gamma}{p^2-(\alpha+\gamma)p}$$

ここに，①′を代入すると，

$$\angle ABP-\angle ADP=\arg\frac{-\alpha\gamma}{(k-1)\alpha\gamma}=\arg\frac{-1}{k-1}$$

$(k\neq 1)$

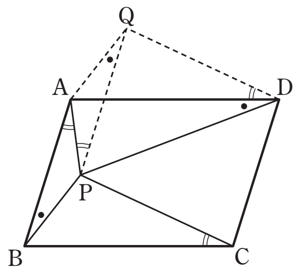
k は実数より，$\arg\dfrac{-1}{k-1}=0$

よって，∠ABP＝∠ADP

ここで，$k=1$ とすると，①′から $p=0$ または $p=\alpha+\gamma$ となり，点 P は点 B または点 D と一致し，平行四辺形ABCDの内部にあることに反する。

【幾何での略解】

△PBC を平行移動して BC を AD に重ねたときの P の位置を Q とすると，∠ADQ＝∠BCP である。



条件 ∠BCP＝∠BAP と平行四辺形ABPQの性質より，∠BAP＝∠APQ である。

よって，∠ADQ＝∠APQ

したがって，四角形 APDQ は円に内接する。

よって，∠ADP＝∠AQP

そして，∠AQP＝∠ABP

以上から，∠ABP＝∠ADP が成り立つ。

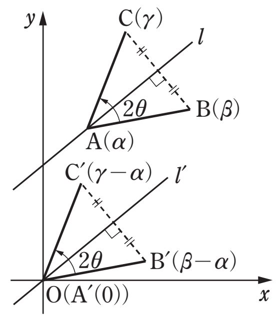
次に，前述のとおり，座標平面での点の回転は単元「行列とその応用」が削除されことにより，「複素数平面」で扱うことになります。一方，直線に関する点の対称移動は，座標平面ではなかなか面倒ですが，複素数平面を使うと容易です。

たとえば，複素数平面において，下の図のように点 A(α) を通る直線 l に関して，点 B(β) と対称な点を C(γ)，∠BAl＝θ とすると，点 C は点 B を点 A のまわりに 2θ だけ回転した点ですから，

$$\gamma-\alpha=(\beta-\alpha)(\cos2\theta+i\sin2\theta)$$

より，$\gamma=\alpha+(\beta-\alpha)(\cos2\theta+i\sin2\theta)$

となります。



この極形式を使っての点の回転が，指導目標 (3) の 1 つです。

では，この考え方を使って，次の幾何の問題の証明にチャレンジしましょう。

問題「鋭角三角形 ABC の外心 O の BC，CA，AB に関する対称点をそれぞれ U，V，W とすると，点 O は △UVW の垂心であることを証明せよ」

この問題の幾何による解答は後述のとおりですが，これを複素数平面で解析したいと思います。そこで，次の【問題2】のように設定を変え，この小問の順に解答を進めてみましょう。

【問題2】

複素数平面上の単位円に，点 A(i)，B(β)，C(γ) である △ABC が内接している。

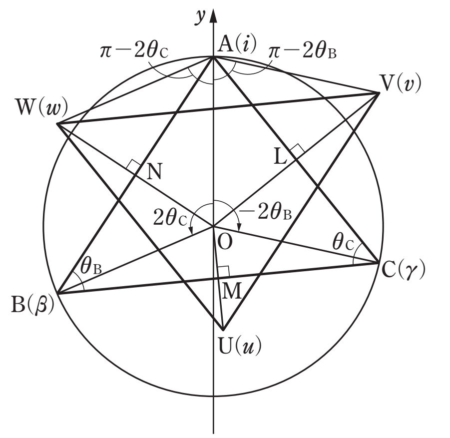
$\angle B=\theta_B$，$\angle C=\theta_C$ として次の問いに答えよ。

(1) 複素数 β，γ を θ_B，θ_C で表せ。

(2) BC，CA，AB に関する原点 O の対称点をそれぞれ U(u)，V(v)，W(w) とする。

複素数 v，w を θ_B，θ_C で表せ。

(3) 原点 O は △UVW の垂心であることを証明せよ。



【複素数平面を利用しての略解】

(1) AO＝BO，∠AOB＝2∠C＝$2\theta_C$ であるから，点 B(β) は点 A(i) を原点 O のまわりに，正の向きに $2\theta_C$ だけ回転すると一致する。

よって，$\beta=i(\cos2\theta_C+i\sin2\theta_C)$

$$=-\sin 2\theta_C+i\cos 2\theta_C$$

同様に，点 $C(\gamma)$ は点 $A(i)$ を原点 O のまわりに，負の向きに $2\theta_B$ だけ回転すると一致する。

よって，$\gamma=i\{\cos(-2\theta_B)+i\sin(-2\theta_B)\}$

$$=i(\cos 2\theta_B-i\sin 2\theta_B)$$

$$=\sin 2\theta_B+i\cos 2\theta_B$$

(2) AO=AV，

$$\angle OAV=2\angle OAC=2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\theta_B\right)=\pi-2\theta_B$$

より，原点 O を点 $A(i)$ のまわりに，正の向きに $\pi-2\theta_B$ だけ回転すると点 $V(v)$ に一致する。

よって，$v=i+(-i)\cdot\{\cos(\pi-2\theta_B)+i\sin(\pi-2\theta_B)\}$

$$=i+(-i)\cdot(-\cos 2\theta_B+i\sin 2\theta_B)$$

$$=\sin 2\theta_B+i(1+\cos 2\theta_B)$$

同様に，原点 O を点 $A(i)$ のまわりに，負の向きに $\pi-2\theta_C$ だけ回転すると点 $W(w)$ に一致する。

よって，$w=i+(-i)\cdot[\cos\{-(\pi-2\theta_C)\}$

$$+i\sin\{-(\pi-2\theta_C)\}]$$

$$=i+(-i)\cdot(-\cos 2\theta_C-i\sin 2\theta_C)$$

$$=-\sin 2\theta_C+i(1+\cos 2\theta_C)$$

(3) $v-w=\{\sin 2\theta_B+i(1+\cos 2\theta_B)\}$

$$-\{-\sin 2\theta_C+i(1+\cos 2\theta_C)\}$$

$$=\sin 2\theta_B+\sin 2\theta_C+i(\cos 2\theta_B-\cos 2\theta_C)$$

$$=2\sin(\theta_B+\theta_C)\cdot\cos(\theta_B-\theta_C)$$

$$-i\cdot 2\sin(\theta_B+\theta_C)\cdot\sin(\theta_B-\theta_C)$$

（和・差の積）

$$=2\sin(\theta_B+\theta_C)\{\cos(\theta_B-\theta_C)$$

$$-i\sin(\theta_B-\theta_C)\}\quad\cdots\cdots③$$

次に，△OBC は OB=OC の二等辺三角形であるから，辺 BC の中点を $M\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)$ とすると，OU=2OM より，点 $U(u)$ は，

$$u=\beta+\gamma$$

$$=(-\sin 2\theta_C+i\cos 2\theta_C)+(\sin 2\theta_B+i\cos 2\theta_B)$$

$$=(\sin 2\theta_B-\sin 2\theta_C)+i(\cos 2\theta_B+\cos 2\theta_C)$$

$$=2\cos(\theta_B+\theta_C)\cdot\sin(\theta_B-\theta_C)$$

$$+i\cdot 2\cos(\theta_B+\theta_C)\cdot\cos(\theta_B-\theta_C)$$

（和・差の積）

$$=2\cos(\theta_B+\theta_C)\{\sin(\theta_B-\theta_C)$$

$$+i\cos(\theta_B-\theta_C)\}\quad\cdots\cdots④$$

③，④より

$$\frac{v-w}{u}$$

$$=\frac{2\sin(\theta_B+\theta_C)\{\cos(\theta_B-\theta_C)-i\sin(\theta_B-\theta_C)\}}{2\cos(\theta_B+\theta_C)\{\sin(\theta_B-\theta_C)+i\cos(\theta_B-\theta_C)\}}$$

$$=\frac{\sin(\theta_B+\theta_C)\cdot(-i)\{\sin(\theta_B-\theta_C)+i\cos(\theta_B-\theta_C)\}}{\cos(\theta_B+\theta_C)\{\sin(\theta_B-\theta_C)+i\cos(\theta_B-\theta_C)\}}$$

$=-i\tan(\theta_B+\theta_C)$（=純虚数）

よって，VW⊥OU が成り立つ。

同様にして，UW⊥OV も証明できる。

したがって，原点 O は △UVW の垂心である。

【幾何での問 (3) の略解】

OV と AC との交点を L，OW と AB との交点を N とすると，△OVW で中点連結定理から，

VW∥LN

また，点 O が △ABC の外心より，L，N はAC，AB の中点で，△ABC に中点連結定理を適用すると，LN∥BC

よって，VW∥BC

一方，OU⊥BC であるから，VW⊥OU が成立する。

同様に，UW⊥OV も証明できる。

したがって，原点 O は △UVW の垂心である。

複素数平面の効果的指導については，この後も引き続き説明したいと思います。

授業のワンポイントレッスン(その3)

具体から抽象へ（授業における「数学的活動」とは）

Focus Gold・Focus Up
編集委員
竹内 英人
Hideto Takeuchi

今回は，「具体から抽象」へというテーマでお話しをしたいと思います。現場の先生方が良く言われることの一つに「最近の生徒は手を動かさない」ということが挙げられます。つまり，問題を解き始める前に書き出したり，実験するといった作業，活動を全くしないということです。私も，高校生を教えていますが，生徒はすぐに公式に頼り，その公式を思い出せないとあきらめる，といった生徒が多いように見えます。自分の手を動かしながら試行錯誤することが出来る生徒は少数です。しかしながら，複雑な問題になればなるほどこの活動が重要になり，どれだけ手を動かして具体的なイメージを計り，題意を自分の言葉に翻訳出来るかが問題解決の大きな鍵となります。

では，実際に生徒に，「手を動かして考える」習慣を身につけさせるにはどうしたら良いでしょう。

私自身，こうした「手を動かす」という活動に最も適している題材は，「場合の数，確率」ではないかと考えています。樹形図や表などを書き出すことによって漏れなく，かつ重複することなく数える作業は，単に「数え上げ」という具体的な活動に止まらず，そこから規則性や一般性などを発見することもあり，まさしく「具体」から「抽象」への架け橋となるのでしょう。そこで，今回は私が高校生を指導する際に使用しているテキストから「確率」の問題を一題取り上げたいと思います。

この問題のコンセプトは，第 1 段階で，手をしっかり動かして，正確に数え上げることを目標とする【解1】，第 2 段階で，(1) と (2) の答えが一緒になるところから，この理由について考える【(2) の別解】，第 3 段階で，より一般的な解法（数え上げによらない漸化式を利用する考え方）と，より効率の良い数え方の研究の考察【解2】，そして第 4 段階で発展的な考察【(2) の別解2】という構成になっています。この4つの段階を踏むことによって，同じ題材に対し，センター試験的な思考（段階1，2）と，二次試験的な思考（段階3，4）の両立を狙っています。

いつもの通り，まずは問題を見ていただき，自分だったらどのような指導を行うか考えた後に，解説を読んでいただけると，イメージが湧きやすいと思います。

【問題】

(1) $\boxed{0}$，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の 5 枚のカードが袋に入っており，その中から 1 枚を取り出してはもとに戻すという試行を 4 回行う。4 回取り出したカードの数の和が 4 の倍数になる確率を求めよ。ただし，どのカードを取り出す確率も等しいものとする。

(2) $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$ の 5 枚のカードが袋に入っており，その中から 1 枚を取り出してはもとに戻すという試行を 4 回行う。4 回取り出したカードの数の和が 4 の倍数になる確率を求めよ。ただし，どのカードを取り出す確率も等しいものとする。

以下，解説です。

【解説】すべてのパターンを数えあげられるならば，すべてを数えあげるというのも立派な方法である。【解1】として紹介する。ただカードが 20 枚などと多くなると困難であるし，n 回取り

出すなどとなると数えることはできない。
【解2】として，一般の場合を考える。

【解1】
(1) 4 枚のカード（重複含む）を決定したときの，何回目に取り出すかという順列を考える。

$\boxed{4}$，$\boxed{4}$，$\boxed{4}$，$\boxed{4}$ など 1 種類を 4 枚
1 通り

$\boxed{4}$，$\boxed{4}$，$\boxed{4}$，$\boxed{0}$ など 2 種類で 3 枚と 1 枚
$\dfrac{4!}{3!}=4$（通り）

$\boxed{4}$，$\boxed{4}$，$\boxed{0}$，$\boxed{0}$ など 2 種類で 2 枚と 2 枚
$\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}=6$（通り）

$\boxed{4}$，$\boxed{4}$，$\boxed{3}$，$\boxed{1}$ など 3 種類で 2 枚と 1 枚と 1 枚
$\dfrac{4!}{2!}=12$（通り）

$\boxed{4}$，$\boxed{3}$，$\boxed{2}$，$\boxed{1}$ など 4 種類で 1 枚ずつ
$4!=24$（通り）

4 枚のカードの数の和で 4 の倍数となるのは，0，4，8，12，16 であるから，それらを調べる。例えば，$\boxed{3}$ のカード 2 枚と $\boxed{0}$ のカード 1 枚と $\boxed{2}$ のカード 1 枚の場合を 3−3−2−0 と略記することにする。

(i) 合計が 0 のとき

0−0−0−0	1 通り

(ii) 合計が 4 のとき

4−0−0−0	4 通り
3−1−0−0	12 通り
2−2−0−0	6 通り
2−1−1−0	12 通り
1−1−1−1	1 通り
	計 35 通り

(iii) 合計が 8 のとき

4−4−0−0	6 通り
4−3−1−0	24 通り
4−2−2−0	12 通り
4−2−1−1	12通り
3−3−2−0	12 通り
3−3−1−1	6 通り
3−2−2−1	12 通り
2−2−2−2	1 通り
	計 85 通り

(iv) 合計が 12 のとき

4−4−4−0	4 通り
4−4−3−1	12 通り
4−4−2−2	6 通り
4−3−3−2	12 通り
3−3−3−3	1 通り
	計 35 通り

(v) 合計が 16 のとき

4−4−4−4	1 通り

(i)〜(v)より，4 の倍数になるのは
$1+35+85+35+1=157$（通り）
取り出し方の総数は $5^4=625$（通り）なので，求める確率は，
$\dfrac{157}{625}$（答）

(2) 同様に数えあげれば

(i) 合計が 4 のとき

1−1−1−1	1 通り

(ii) 合計が 8 のとき

5−1−1−1	4 通り
4−2−1−1	12 通り
3−3−1−1	6 通り
3−2−2−1	12 通り
2−2−2−2	1 通り
	計 35 通り

(iii) 合計が 12 のとき

5−5−1−1	6 通り
5−4−2−1	24 通り
5−3−3−1	12 通り
5−3−2−2	12通り
4−4−3−1	12 通り
4−4−2−2	6 通り
4−3−3−2	12 通り
3−3−3−3	1 通り
	計 85 通り

(iv) 合計が 16 のとき

5−5−5−1	4 通り
5−5−4−2	12 通り
5−5−3−3	6 通り
5−4−4−3	12 通り
4−4−4−4	1 通り
	計 35 通り

(v) 合計が 20 のとき

5−5−5−5	1 通り

(i)〜(v)より，4 の倍数になるのは，
$1+35+85+35+1=157$（通り）
取り出し方の総数は $5^4=625$（通り）なので，求める確率は，
$\dfrac{157}{625}$（答）

(注1) 答はおよそ $\dfrac{1}{4}$ であるという予想はたてて欲しい。答がかなり $\dfrac{1}{4}$ に近いのにも納得がいくであろう。逆に，$\dfrac{1}{4}$ からかけ離れた数値になっていたら，計算ミス，数え忘れ，ダブルカウントなどを疑ってみるべきである。

(注2) (1) と (2) の解答（考え方）がほぼ類似であるのもわかる。しかし，答えが一致する理由は分かるだろうか。その理由は【(2) の別解】として，説明していく。

(注3) $\dfrac{157}{625}$ はこれ以上約分できないだろうか？
本問では，分母の 625 が 5^4 であったことを意識しておけば，分子の 157 が 5 の倍数ではないので，もう約分できないとわかる。一般に，約分を考えるときには分母，分子の素因数分解をするのが確実である。仮に 157 が $157=a\times b$（ただし，a と b は正の整数）と表せたとする。a と b のどちらかは $\sqrt{157}$ 以下である。（両方とも $\sqrt{157}$ より大きいと $a\times b>157$ となってしまう。）
$144<157<169$ より $12<\sqrt{157}<13$ なので，12 以下の素数 2，3，5，7，11 で 157 は割り切れることになる。しかし，実際には割り切ることができないので 157 は素数と判定できる。よって，これ以上は約分できないとわかる。

【(2) の別解】
(1) の $\boxed{0}$〜$\boxed{4}$ の 5 枚のカードと，(2) の $\boxed{1}$〜$\boxed{5}$ の 5 枚のカードを以下のように対応させていく。

(1)		(2)
$\boxed{0}$	⇔	$\boxed{1}$
$\boxed{1}$	⇔	$\boxed{2}$
$\boxed{2}$	⇔	$\boxed{3}$
$\boxed{3}$	⇔	$\boxed{4}$
$\boxed{4}$	⇔	$\boxed{5}$

(1) のカードから (2) のカードへは数値を $+1$ する写像であり，(2) のカードから (1) のカードへは数値を -1 する写像でこれらは 1 対 1 に対応する。
よって，それぞれのカードの組に対し，
((1) のカード 4 枚の和)$+4$
$=$(対応する (2) のカード 4 枚の和)
となる。
これより，
「(2) のカード 4 枚の和が 4 の倍数」
⇔「(1) のカード 4 枚の和が 4 の倍数」
であるから，4 の倍数になるのは 157 通り。
取り出し方の総数は $5^4=625$（通り）なので，求める確率は，
$\dfrac{157}{625}$（答）

【解2】

カードをとり出すのは4回ずつであるが，一般の場合，n 回の場合を考えてみる。n は自然数とする。

(1) n 回取り出した時点での合計が4の倍数である確率を P_n とする。

$n+1$ 回目に4の倍数となるのは

(i) n 回目までの合計が4の倍数のとき（確率 P_n）

$\boxed{0}$ または $\boxed{4}$ のカードをひけばよい $\left(確率\ \dfrac{2}{5}\right)$

(ii) n 回目までの合計が4の倍数でないとき（確率 $1-P_n$）

4で割った余りが1のとき $\boxed{3}$ のカードをひけばよい $\left(確率\ \dfrac{1}{5}\right)$

4で割った余りが2のとき $\boxed{2}$ のカードをひけばよい $\left(確率\ \dfrac{1}{5}\right)$

4で割った余りが3のとき $\boxed{1}$ のカードをひけばよい $\left(確率\ \dfrac{1}{5}\right)$

(i)，(ii)より

$$P_{n+1}=\frac{2}{5}P_n+\frac{1}{5}(1-P_n)$$

$$=\frac{1}{5}P_n+\frac{1}{5}$$

$P_1=\dfrac{2}{5}$ であるから，順次代入していき，

$$P_2=\frac{7}{25},\quad P_3=\frac{32}{125},\quad P_4=\frac{157}{625}\quad(答)$$

(注) 上の解法で(ii)では，本来ならば，4で割った余りが1になっている確率，4で割った余りが2になっている確率，4で割った余りが3になっている確率を $P(1,\ n)$，$P(2,\ n)$，$P(3,\ n)$ などとして考えるところだが，

$$P(1,\ n)+P(2,\ n)+P(3,\ n)=1-P_n$$

であるから，

$$\frac{1}{5}P(1,\ n)+\frac{1}{5}P(2,\ n)+\frac{1}{5}P(3,\ n)$$

$$=\frac{1}{5}\{P(1,\ n)+P(2,\ n)+P(3,\ n)\}$$

$$=\frac{1}{5}(1-P_n)$$

とできる。（この考え方を，「確率をまとめる」という。）

(2) 今度は4で割って1余るカードが $\boxed{1}$，$\boxed{5}$ の2枚，それ以外の4で割って2余るカード，3余るカード，割り切れるカードが1枚となり，(1)の(ii)とは状況が異なる。簡単には漸化式を考えられそうにはない。次のように処理するのも実践的かもしれない。2回カードを取り出したしときの和が（4の倍数）+0，（4の倍数）+1，（4の倍数）+2，（4の倍数）+3の確率をそれぞれ，$q(2,\ 0)$，$q(2,\ 1)$，$q(2,\ 2)$，$q(2,\ 3)$ と表す。

下の表は，2回のカードの数の和を4で割った余りを書き込んだもので，

これより，

$$q(2,\ 0)=\frac{6}{25},\quad q(2,\ 1)=\frac{6}{25}$$

$$q(2,\ 2)=\frac{7}{25},\quad q(2,\ 3)==\frac{6}{25}$$

となる。

	1	2	3	4	5
1	2	3	0	1	2
2	3	0	1	2	3
3	0	1	2	3	0
4	1	2	3	0	1
5	2	3	0	1	2

求める確率を2回目までの合計で場合分けして考えると，

$$q(2,\ 0)\cdot q(2,\ 0)+q(2,\ 1)\cdot q(2,\ 3)$$

$$+q(2,\ 2)\cdot q(2,\ 2)+q(2,\ 3)\cdot q(2,\ 1)$$

$$=\frac{1}{25^2}(6^2+6^2+7^2+6^2)$$

$$=\frac{157}{625}\quad(答)$$

(注) (2)も漸化式をつくることは可能である。意欲のある人は以降の解説をすぐに見ないで考えて欲しい。ヒントは，【解1】の中で【(2)の別解】として述べた，(1)と(2)でのカードの対応である。

【(2)の別解2】

k 回目までの数の合計が（4の倍数）$+k$ である確率を q_k とおく。……(＊)

$q_1=\dfrac{2}{5}$ （$\boxed{1}$ または $\boxed{5}$ のとき）である。

$n+1$ 回の合計が（4の倍数）$+n+1$ となる確率を考える。

(i) n 回目までの合計が（4の倍数）$+n$ となるとき（確率 q_n）

$n+1$ 回目に $\boxed{1}$ または $\boxed{5}$ のカードをひけばよい $\left(確率\ \dfrac{2}{5}\right)$

(ii) n 回目までの合計が（4の倍数）$+n$ とならないとき（確率 $1-q_n$）

このときは n 回の合計が

（ア）（4の倍数）$+n-1$

（イ）（4の倍数）$+n-2$

（ウ）（4の倍数）$+n-3$

のいずれかであるが，（ア）のときは $\boxed{2}$，（イ）のときは $\boxed{3}$，（ウ）のときは $\boxed{4}$ のカードをひけばよいので，いずれの確率も $\dfrac{1}{5}$

(i)，(ii)は互いに独立で排反な事象であるから，

$$q_{n+1}=q_n\times\frac{2}{5}+(1-q_n)\times\frac{1}{5}$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}q_n$$

となる。

$q_1=\dfrac{2}{5}$ であるので，$\{q_n\}$ は(1)の $\{P_n\}$ と初項が同じで，同じ二項間漸化式で帰納的に定義されている。よって，すべての自然数 n に対して，$q_n=P_n$

したがって，$q_4=P_4=\dfrac{157}{625}$ （答）

さて，(＊)のように q_k を定めた理由を説明しよう。例えば，カードを2回取り出したときの数の和を4で割った余りの表は次の通り。

(1) ←1回目

	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	0
1	1	2	3	0	1
2	2	3	0	1	2
3	3	0	1	2	3
4	0	1	2	3	0

↑ 2回目

(2) ←1回目

	1	2	3	4	5
1	2	3	0	1	2
2	3	0	1	2	3
3	0	1	2	3	0
4	1	2	3	0	1
5	2	3	0	1	2

↑ 2回目

2つの表を見比べると，(1)の1回目の $\boxed{0}$，$\boxed{4}$（余り0）が，(2)の1回目の $\boxed{1}$，$\boxed{5}$（余り1）へと，数がプラス1されている。(1)の2回目と(2)の2回目の関係も同様にプラス1されている。そして，2回とり出した数の和を4で割った余りでは(1)の○で囲った0の場合は，(2)ではすべて○で囲まれた2の場合になることがわかる。

よって，1回取り出した余りはプラス1，2回取り出した余りはプラス2と考えていけば，(1)と(2)は同等の関係が成立することがわかる。そこで，n 回取りだしたときに合計が（4の倍数）$+n$ になるときを考えたというわけである。

(注) (1)の P_n は，

$$P_1=\frac{2}{5}=0.4$$

$$P_2=\frac{7}{25}=0.28$$

$$P_3=\frac{32}{125}=0.256$$

$$P_4=\frac{157}{625}=0.2512$$

$$P_5=\frac{782}{3125}=0.25024$$

………

と次第に $\frac{1}{4}(=0.25)$ に近づいていくのもわかる。

P_n に関する漸化式

$$P_{n+1}=\frac{1}{5}P_n+\frac{1}{5}$$

を解くと，$\alpha=\frac{1}{5}\alpha+\frac{1}{5}$ なる α は $\alpha=\frac{1}{4}$ であるから，

$$\begin{array}{rrcl} & P_{n+1} & = & \frac{1}{5}P_n+\frac{1}{5} \\ -) & \frac{1}{4} & = & \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{5} \\ \hline & P_{n+1}-\frac{1}{4} & = & \frac{1}{5}\left(P_n-\frac{1}{4}\right) \end{array}$$

これより，

$$P_n=\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\left(P_1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n+\frac{1}{4}$$

となる。

$$\lim_{n\to\infty}P_n=\frac{1}{4}$$

となるのは，文系受験者でも納得できるであろう。

いかがだったでしょうか。このように一つの問題を，「書き出す」という具体的活動から入り，最終的に「漸化式」という演繹的な考え方にたどり着くことによって，生徒は「手を動かす」ことの大切さを実感できるのではないでしょうか。

今回の新学習指導要領のキーワードの一つに「数学的活動」があります。現場の先生方は，「数学的活動」という言葉を聞くと，何か「特別な指導」を行わなくてはならないと考える方が多いようです。しかし，上に述べてきたように一つの問題を，様々な角度から眺めることも，立派な「数学的活動」になると思います。今回の指導要領改訂にも大きく関わられた，元日本数学会会長の浪川幸彦先生（椙山女学園大学）は，「上質な入試問題をじっくり考えることも立派な数学的活動である」とおっしゃっています。

つまり，我々教師自身が明確な教材観を持ち，十分な教材研究を行うことによって，
普段の授業が，「数学的活動」の場になるということだと思います。
今回の，「具体から抽象へ」という話題は，そんな活動の一例になるのではないでしょうか。

竹内英人 (takeuchi@meijo-u.ac.jp)

理数教育の未来へ
啓林館
http://www.shinko-keirin.co.jp/
〒543-0052 大阪市天王寺区大道4-3-25 TEL.06-6779-1531 FAX.06-6779-5011
〒113-0023 東京都文京区向丘2-3-10 TEL.03-3814-2151 FAX.03-3814-2159
〒003-0005 札幌市白石区東札幌5条2-6-1 TEL.011-842-8595 FAX.011-842-8594
〒461-0004 名古屋市東区葵1-4-34 双栄ビル2F TEL.052-935-2585 FAX.052-936-4541
〒732-0052 広島市東区光町1-7-11 広島CDビル5F TEL.082-261-7246 FAX.082-261-5400
〒810-0022 福岡市中央区薬院1-5-6 ハイヒルズビル5F TEL.092-725-6677 FAX.092-725-6680
20130401