啓林館 高校数学 教育情報誌

啓林館

Focus Gold 通信

フォーカスゴールド

vol.7

特集

中学・高校数学の系統についての絵図の活用とその連結

東山高等学校　鶴迫貴司

1．はじめに

「絵図は百や千の言葉を語る」と言われるほど，描かれた情景の見方や捉え方によっては，その絵図がさまざま論評を呼ぶことがあります。これを初めに述べさせていただいた理由は，絵図をご覧になられた先生方からたくさんのご意見とご指導をお願いしたいと思っているからです。

教員生活を始めはや10年が過ぎ，これまでに数多くの先生方とのご縁がありました。これまでに出会ったすべての先生方からご指導していただき，とても感銘を受けました。今でも多くの先生方からご指導していただくことが多く，教員としてばかりではなく一人間として学ぶことの連続であります。たとえば，指導していただいた中では，「どのように授業をするべきなのか」や「生徒に新しい分野や単元（概念）を伝えるとき，それ以後の学習に弊害が出ないようにするためにはどのように授業を開拓し展開しておくべきなのか」などについては，今でも非常に勉強になることが多くあります。このように他府県の先生方や大学の先生方からのご指導をいただくことは，教員生活の支えになっていることは言うまでもありません。本当にありがとうございます。

2．授業ではどのような話をするべきなのか？

さて本題に入りますが，4月初めの1回目の授業では，私自身の授業のあり方や指導方法，そして，この1年間でどのような分野や単元，そしてどのような新しい概念を学ぶのかといったことを含め生徒に話をします。それらがどのような形で具体的に利用され，世の中に還元されているかの話もときにはします。とくに高校数学を学び始めようとする高校1年生（中高一貫校では一般的に中学3年生）ではそれ以上に，この3年間で数学を通し，どのような力を身につけるのか（理解力を高め，想像力を育み，表現力を養う）の話をじっくり時間をかけて説明をします。

通常，私の授業では教科書主体です。しかし，「生徒にとって初めて学ぶ概念を，どのように伝えるかで勝負が決まる」と思い常に授業にあたっていますが，教科書主体の授業だけとなると，生徒は中学1年生の数学から高校の数学ⅠAⅡBⅢまでの諸分野を分野別に学習する（私はこのことを「縦の学習」と呼んでいます）ことが多く，分野と分野の融合や連結（「縦の学習」に対して，いわゆる「横の学習」と私は呼んでいます）といった学習がされないまま，知識の植え込みと付け足しとなってしまう可能性が高く，「今，どの分野の何を学ぼうとしているのか」と見通せず，しかも高校数学の全体像が描けずに，どのような力が身についたのかも確認ができずに高校を卒業するのではないかと危惧したりもしています。

それらを含めて授業では，あらゆることを展開しなければならないと私は思っています。上述したように，私は，生徒が初めて学ぶ分野や単元を習得させるには，教科書を主軸に利用します。そして，生徒が一通り数学ⅠAⅡBの諸分野を学びきったところで，もう一度それらを復習しつつ「縦の学習」から「横の学習」にシフトしなければならない時期が必要ではないかと考えています。ただ，その「横の学習」にシフトする時期やタイミングは，生徒集団の雰囲気や性質によって，臨機応変に使えなければならない部分があると思っています。しかも，生徒集団が異なると，前年度そして前例の踏襲だけといった一定のやり方だけでは対応しきれないことが多いと思っています。私の事案ですが，「縦の学習」から「横の学習」にシフトする際に，私は主に大学受験用の問題集を採用します。もちろんそれぞれの生徒集団に対して，伝えるべきことを明確にし，問題集のレベルや質にも時間をかけてそれを選定します。ただ，大学受験用の問題集もそのほとんどが分野別で構成されていることが多く，物足りなさを感じるときには，プリントなどを作成し補ったりもします。また，ある問題の解説を行うときにも，異分野からのアプローチを心掛けたり，オリジナルの別解を提示したりすることもあるため，問題集だけでは，結局は「縦の学習」から脱却できていないのではないかと感じたことがあります。

このように「縦の学習」から「横の学習」にシフトするには，比較的パワーが必要な場面があります。ある分野とある分野の融合によって作問されている問題を解説するときには，既習事項をもう一度別な視点で捉え直す必要があるからです。既習分野をすっかり忘れている生徒も中にはいることもあり，定義から見直すこともあります。

何が言いたいのかというと，教科書を使って一通り数学ⅠAⅡBを学びきり，あらゆる概念が出揃ったところですぐに大学受験用の問題集を活用して「横の学習」にシフトしても，すべての歯車がうまく回り始めるとは限らないということです。したがって，これも私の事案ですが，数学ⅠAⅡBを学習する一通り目の学習においても，その先に存在する「横の学習」につながるような問題の提供を，生徒の状況を把握した上で時期とタイミングを見計らい，それらを少しは行っていた方がよいのではないかと感じたこともあります。現在もそうですが，やはり「授業では何を語るべきなのか」を常に考えさせられています。

3．絵図を描こうとしたきっかけ

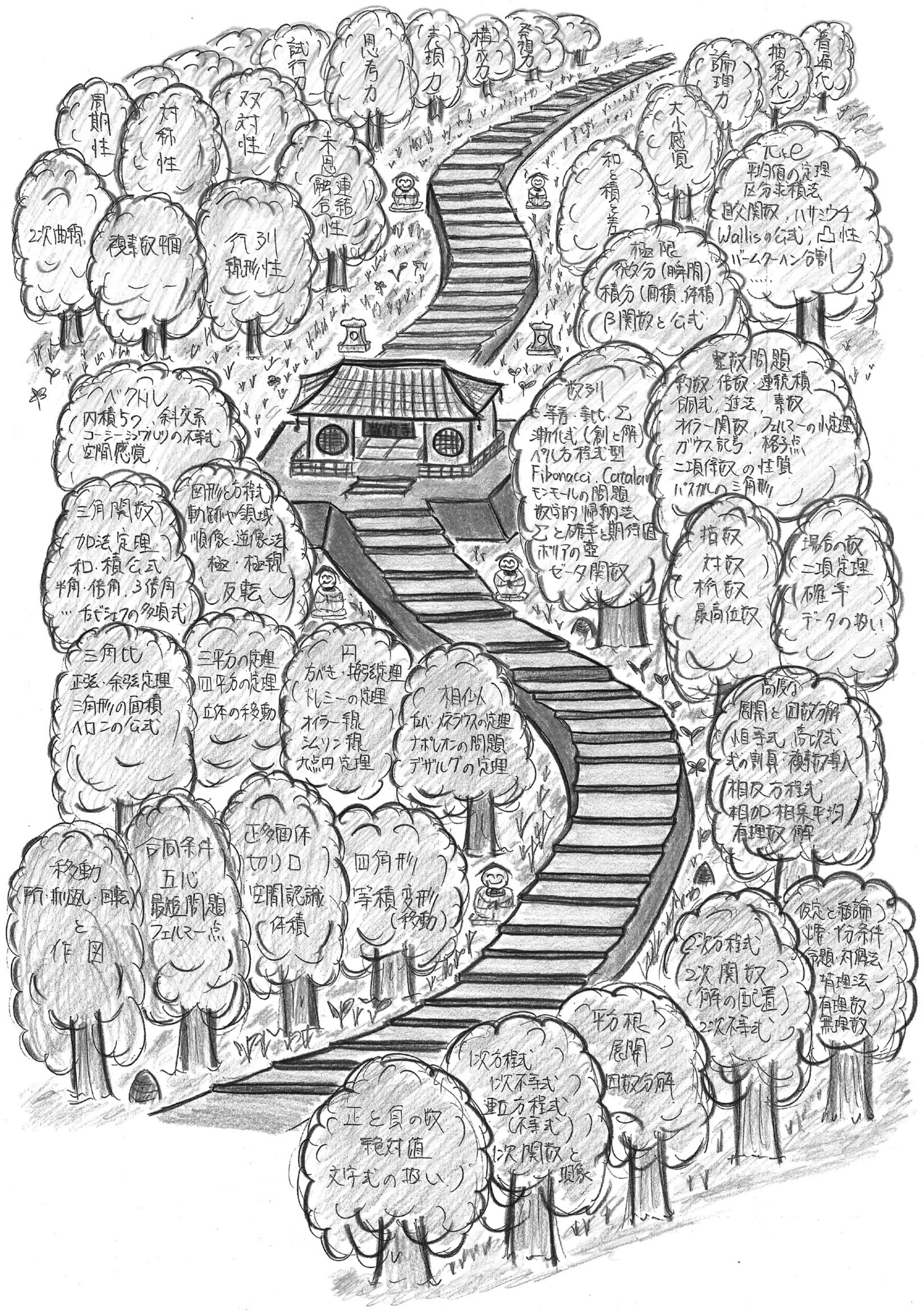
これらを打破するために考案した具体策は，曼荼羅図のような数学の絵でした。数学では，「縦の学習」に対して「横の学習」も存在しているということを生徒に示し，「いま学ぼうとしていることが，どの分野のどこと繋がっていくのか」も非常に重要な要素だと感じていました。それらを重点的に示したいという思いではじめは曼荼羅図のような絵を描きました。

ところが，大学受験の入試問題には「あるテーマに基づいて作問されている問題や背景を持つ問題」も数多く見られます。中学・高校6年間または高校3年間という時間が限られている中で，それらを含め「どのような力をつけさせたい」のかを考え授業しなければなりません。つまり，数学的な流れ（「縦の学習」と「横の学習」がスパイラル的に絡み合っている）が存在し，それらを提示できれば，「縦の学習」から「横の学習」への橋渡しも，多くの時間をかけることなくスムーズにいくのではないかと感じていました。

そして，タイミングよくこれらのことを他府県の先生方に相談を持ちかける機会が偶然にめぐってきました。多くの先生方からは，イメージしているものを一挙に提示ができ，生徒にとっては一目瞭然なものが良いのではないかというご意見をいただきました。そのことによって，過去に描いた曼荼羅図のような絵では対応しきれないということが判明しました。つまり，頂いたご意見を参考にし，様々な目的や要素を取り入れて描き始めたのが次のページ「絵図」です。この「絵図」の第一の目的は，生徒にとって「今どの分野のどの単元を学習または習得しているのだろうか」を明確にするためです。第二には，「数学ⅠAⅡBを一通り学習する際に，必要最低限学んでおいた方がよいと思われる概念または背景をもつ問題やテーマを明確にする」ことです（生徒集団によっては省く内容もあります）。

ある意味，難関大学を受験する際に必要な単元やテーマをそれぞれの樹木に明記したつもりでいます。第三には，「現行のカリキュラムにできる限り近くなるようにする」ことです。

さて，具体的に見ていくと，階段中腹のお寺（数術寺）までの両脇にある１本ずつの樹木は「縦の学習」に相当しています。中学１年生から習得する数学の諸分野を，階段を挟んで右側は主に代数系統の分野，左側は主に幾何学系統の分野です。ある樹木の配列が少しずれているのではないかといったところもありますが，その理由は，分野ごとの「縦の学習」を一通り終了した後，「横の学習」にシフトするときに，スムーズな橋渡しができればと思い描いていたためです。またそれに加えて，階段を挟み左右の分野（樹木）を同時期に学習していくと効果的であるところもあります。しかも階段の幅は，その周辺の分野を身につける際に要する時間をあらわしたつもりでいますが，それは個人によるという意見もあるでしょう。



ただ，この「絵図」によって少しでも数学に対する苦手意識のある生徒に対して，いま学ぼうとしている分野で躓いてしまう理由は，それよりも下にあるどこかの分野（樹木）が忘却または欠落しているのではないかというチェック機能も果たせればよいと思い描いたところもあります。

このようにさまざまな目的，すなわち「数学的な‘縦と横’の流れ」「いまどの分野のどこを学ぼうとしているか」「何が不足しているのかなどのチェック機能を果たす」「どのような力や考え方，そして知識が身についたのか」などを盛り込んだことによって，このような「絵図」となりました。補足となりますが，この情景（階段，樹木，お寺など）にしたのは，東山中学・高等学校が浄土宗知恩院を母体とする学校であることが大きな理由です。

4．絵図を活用したことで…

4月の初回の授業や，新しい分野を学び始めようとする際に，この「絵図」を利用して授業をしたところ，生徒がまず口にしたのは「これから学ぶことって結構あるんだ」「僕は，○○の分野が少し忘れているから，復習しなければいけないなぁ」「忘れているとかではなく完全に抜け落ちている単元があるので，参考書などで勉強しておこう」「これを学んだ次にはこのような分野を学習するんだ」などがありました。正直，私が思っていた以上の反応がありました。一番，嬉しかったのは「大学受験に必要な単元や要素が一目でわかるので，復習がしやすくて自分に何が欠けているのかがわかり，勉強しやすくなった」という意見でした。それと「教科書の目次からだけだとこのようなことが読み切れず，教科書にはその先にどのような話が展開されるのかが掲載されていなくて，繋がりが不明瞭であるため，これを参考にし勉強したい」がありました。

さらに高校2·3年生で受験勉強にまっしぐらな生徒の中には，「この単語（言葉）に関連している問題は，この問題集や参考書の中にありますか」といった質問を投げかけてくる生徒も出てきました。そして，「高遠にある樹木に書かれているテーマによって選別し，問題集を捉え直して指示してほしい」といった生徒もいました。おそらく，このような生徒は自分自身で考える力がすでに融合されており，この「絵図」以上のものを保持しているのではないかと思います。

このようにあらゆる分野や単元の枠にとらわれずに学習をする生徒が増えたのが事実としてあります。つまり，私の考えた目的以上に，生徒は規定の枠にはめることなくこの「絵図」を利用し，一部分であるものの数学に対する考えることの面白さや楽しさを得られたのではないかと思っています。また，それらが発展し生徒一人一人が，自学自習するきっかけになったかもしれません。このようなことが生徒同士（集団）で広がり始めたおかげで，授業の中でも新たな話を展開しやすくなりました。

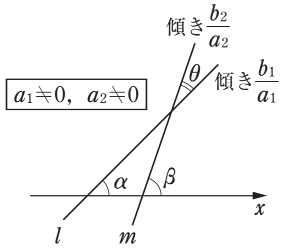
一方で，同僚や他府県の先生方から頂いた意見の中には，上述した以外に，「記載されているテーマや背景をもつ問題を，どのタイミングで生徒に提供すればよいのだろうか」といった意見が多くありました。それは，常に議論の余地があるところだと私は思っています。もう一度述べさせていただきますが，テーマ性がありしかも背景をもつような問題を提供するのかしないのかは，その生徒集団の状況によって考えればよいと思っています。一定の時期にみな一斉に与えるということだけでは効果はあまり上がらないと考えています。換言すれば，生徒にどのタイミングでどのような問題を提供するべきかは，目の前にいる生徒を常日頃から指導している先生方がそれらを保持されているかと思います。

5．具体的にどのように繋げていくのか？

さてここでは，「縦の学習」から「横の学習」

にシフトする一例を紹介したいと思います。たとえば，三角比，三角関数，図形と方程式，ベクトルといった諸分野が一通り出揃ったところで，次のように正接 $\tan\theta$ に関する話題を提供し，異分野との連結を行うことをしてみます。問題を捉える洞察力などにもつながる部分があるかと思います。そして，これまでに出会ってきた問題に対しても異なるアプローチができるようになることを目指したいと思っています。

まずは，2 直線のなす角 $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ について，一般的に成り立つことを確認します。つまり，図のように設定すると，$\alpha+\theta=\beta$ だから，$\theta=\beta-\alpha$ なので，この両辺に正接を施すと，



$$
\begin{aligned}
\tan\theta &= \tan(\beta-\alpha) \\
&= \frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\cdot\tan\alpha} \\
&= \frac{\dfrac{b_2}{a_2}-\dfrac{b_1}{a_1}}{1+\dfrac{b_2}{a_2}\cdot\dfrac{b_1}{a_1}} \\
&= \frac{a_1b_2-b_1a_2}{a_1a_2+b_1b_2} \quad (\because a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0)
\end{aligned}
$$

となり，ここでは傾きや x 軸とのなす角についての大小は考慮されていないので，この分子には，絶対値が必要である。したがって，

$$\tan\theta = \frac{|a_1b_2-b_1a_2|}{a_1a_2+b_1b_2} = \frac{\text{平行四辺形の面積}}{\text{内積}}$$

として捉えます。つまり，既習事項も含めて $\tan\theta$ について，まとめると

$$
\begin{aligned}
\tan\theta &= \frac{\text{高さ}}{\text{底辺}} \\
&= \frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}} \\
&= \frac{\text{2つのベクトルで作る平行四辺形の面積}}{\text{内積}}
\end{aligned}
$$

のようになります。ということは，「内積」を直角三角形の底辺，「平行四辺形の面積」を直角三角形の高さに見立てると，

$$\cos\theta = \frac{\text{内積}}{\sqrt{(\text{内積})^2+(\text{平行四辺形の面積})^2}},$$

$$\sin\theta = \frac{(\text{平行四辺形の面積})}{\sqrt{(\text{内積})^2+(\text{平行四辺形の面積})^2}}$$

となります。ただし，θ は $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であることに注意します。また，

内積の値が 0

のときは，$\tan\theta$ の値は存在しないので，90° として扱います。これは今までと同様の扱いです。

ところで，分母の $\sqrt{(\text{内積})^2+(\text{平行四辺形の面積})^2}$ についてですが，

$$\overrightarrow{m_1}=\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{m_2}=\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$(a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0,\ \overrightarrow{m_1} \nparallel \overrightarrow{m_2})$$

だと本質的な部分が見えにくいので，

$$\overrightarrow{m_1}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},\ \overrightarrow{m_2}=\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$(a \neq 0,\ c \neq 0,\ \overrightarrow{m_1} \nparallel \overrightarrow{m_2})$$

としておくと，$\sqrt{(\text{内積})^2+(\text{平行四辺形の面積})^2}$ は

$$
\begin{aligned}
&(\text{内積})^2+(\text{平行四辺形の面積})^2 \\
&=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)
\end{aligned}
$$

となり，この右辺はラグランジェの恒等式となります。つまり，$\sin\theta$ や $\cos\theta$ はラグランジェの恒等式とつながっているとも言えます。このことによって，さらに話を展開させると，整数問題にもつなげることができます。ここで少し最近の入試問題を扱っておきます。

> 問題1
>
> x を正の実数とする。座標平面上の 3 点 A$(0,\ 1)$，B$(0,\ 2)$，P$(x,\ x)$ をとり，△APB を考える。x の値が変化するとき，∠APB の最大値を求めよ。　　　(2010　京都大)

解答

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ x-1 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{BP}}=\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ x-2 \end{pmatrix}$$

だから，∠APB$=\theta$ とすると，

$$
\begin{aligned}
\tan\theta &= \frac{|x(x-2)-(x-1)x|}{x^2+(x-1)(x-2)} \\
&= \frac{|-x|}{2x^2-3x+2} \\
&= \frac{x}{2x^2-3x+2} \\
&= \frac{x}{2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}} \quad (\because x>0)
\end{aligned}
$$

となる。ところで，この分母分子はともに正であり，しかも今 $x \neq 0$ だから，これで割ると，

$$\tan\theta = \frac{1}{2x+\dfrac{2}{x}-3} = \frac{1}{2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-3}$$

となるが，この分母において，$x>0$ だから，相加・相乗平均の関係より，

$$x+\frac{1}{x} \geqq \sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2 \iff x+\frac{1}{x} \geqq 2$$

となるから，分数式において，分母の最小値が，分数全体の最大値となり得る。よって，それは等号成立のときであるから，

$$x=\frac{1}{x} \iff x=1 \quad (\because x>0)$$

のとき，$\tan\theta$ は最大となる。

つまり，代入すれば，

$$\tan\theta=\frac{1}{4-3}=1 \iff \theta=45^\circ$$

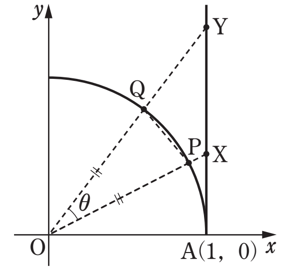
となる。

次も同様な問題です。

> 問題 2
>
> 定数 k は $k>1$ を満たすとする。xy 平面上の点 A$(1,\ 0)$ を通り，x 軸に垂直な直線の第 1 象限に含まれる部分を，2 点 X，Y が AY$=k\cdot$AX を満たしながら動いている。原点 O$(0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円と線分 OX，OY が交わる点をそれぞれ P，Q とするとき，△OPQ の面積の最大値を k を用いて表せ。　　　(2011　東京工業大)

解答 (ここでは直接 $\sin\theta$ で処理していきます。)

題意を図示すると，$k>1$ より，図のように A，X，Y が並ぶ。



ここで，∠POQ$=\theta$ とすると，θ は $0^\circ<\theta<90^\circ$ であることも明らかである。したがって，△OPQ の面積は，

$$\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}\sin\theta$$

である。X, Y の座標を t を用いて表すと，X$(1,\ t)$ とすれば，$k>1$ より，Y$(1,\ kt)$ となる。ただし，$t>0$ である。つまり，このことから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{OY}}=\begin{pmatrix} 1 \\ kt \end{pmatrix}$$

であるので，

$$
\begin{aligned}
\sin\theta &= \frac{|kt-t|}{\sqrt{(1+kt^2)^2+(kt-t)^2}} \\
&= \frac{t(k-1)}{\sqrt{k^2t^4+(k^2+1)t^2+1}} \\
&\qquad (\because t>0,\ k-1>0)
\end{aligned}
$$

となり，△OPQ$=\dfrac{1}{2}\sin\theta$ より，この最大値は $\sin\theta$ が最大のときである。

よって，$t>0$ だから，上式の分母分子を t で割ると，

$$\sin\theta=\frac{k-1}{\sqrt{k^2t^2+\dfrac{1}{t^2}+(k^2+1)}}$$

となり，$0^\circ<\theta<90^\circ$ のとき，$\sin\theta$ は単調に増加するので，この式の $\sin\theta$ の最大値を求めるということは，上の式の分母の最小値を求めることに等しいといえる。したがって，$t^2>0$ だから，相加・相乗平均の関係より，

$$k^2t^2+\frac{1}{t^2} \geqq 2\sqrt{k^2t^2\cdot\frac{1}{t^2}}=2\sqrt{k^2}=2|k|=2k$$

$$(\because k>0)$$

となるので，等号が成り立つとき，つまり，

$$k^2t^2=\frac{1}{t^2} \iff t=\frac{1}{\sqrt{k}} \quad (\because k>0)$$

のとき，$k^2t^2+\dfrac{1}{t^2}$ の最小値は $2k$ といえる。

以上より，△OPQ の面積の最大値は，

$$\triangle \mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{k-1}{\sqrt{2k+(k^2+1)}}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{k-1}{\sqrt{(k+1)^2}}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{k-1}{|k+1|}$$
$$=\frac{k-1}{2(k+1)}$$

である。

【参考】ここで，加法定理についてですが，3つの角の場合について議論してみます。はじめに余弦について考えてみます。少し発展的な内容かもしれませんが，利用できるできないを問わず正弦とも合わせて学習しておきたいところです。

$$\cos(A+B+C)=\cos\{A+(B+C)\}$$
$$=\cos A\cos(B+C)-\sin A\sin(B+C)$$
$$=\cos A\{\cos B\cos C-\sin B\sin C\}$$
$$-\sin A\{\sin B\cos C+\cos B\sin C\}$$
$$=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C$$
$$-\sin A\sin B\cos C-\sin A\cos B\sin C$$
$$=\cos A\cos B\cos C\left(1-\frac{\sin B\sin C}{\cos B\cos C}-\frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}-\frac{\sin C\sin A}{\cos C\cos A}\right)$$
$$=\cos A\cos B\cos C(1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A)$$

だから，

$$\cos(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C\times(1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A)$$

となります。一方で，同様に

$$\sin(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C\times(\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C)$$

となります。

たとえば，2013年東京医科歯科大学の入試問題1番の(2)ですが，

> 実数 α，β，γ が
> $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，$0<\gamma<\frac{\pi}{2}$，
> $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$
> を満たすとき，
> $\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha$
> の値は一定であることを示せ。

解答

実数 α，β，γ が $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，$0<\gamma<\frac{\pi}{2}$，$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$

だから，

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\times(1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha)$$
$$\iff \cos\frac{\pi}{2}=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma(1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha)$$
$$\iff 0=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma(1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha)\quad\cdots\cdots\bigstar$$

となる。

ここで，実数 α，β，γ が $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\gamma<\frac{\pi}{2}$

だから，

$$0<\cos\alpha<1,\ 0<\cos\beta<1,\ 0<\cos\gamma<1$$

なので，★の右辺において

$$1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha=0$$

となるので，

$$\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha=1$$

であり，題意が示せた。

6．今後の課題と展望

樹木の1本ずつが順番や配列を含め，樹木と樹木が繋がっていく部分は未熟なところもあり，この「絵図」が完璧ということはありません。階段を上がっていくと中腹のお寺（数術寺）にたどり着き，ここまでが数学ⅠAⅡBの諸分野です。それよりも上段に配列している樹木は，理系の生徒向けであるものの，その高遠にある樹木（テーマ性が描かれている木）は，文系生徒にも必要最低限学んでおいてほしい事項も描かれています。つまり，文系，理系を問わず大学入試に出題される問題の中の一部には，テーマ性がありしかも背景をもつ問題が出題されるため，どのような視点で問題を捉え，どのように問題を解決していくのかといったことを含めて，あらゆる視点に立てる考え方と着眼点を身につけてほしいと願っています。

がしかし，この「絵図」に描かれていないテーマも存在するのではないかという意見もあるかと思います。

ところで，この「絵図」を別な物差しで眺めてみると，その高遠なテーマ性が描かれている樹木類は，数学を扱っていくのに必要な素養や考え方であるために，この「絵図」では樹木にするのではなく，潜土の部分でつながっているのではないかということも考えられます。したがって，このような図は3次元で描くべきではないかということも言えるでしょう。

以上のように，この「絵図」にはまだまだ未熟な部分が多々あり，はじめの言葉「絵図は百や千の言葉を語る」に戻ってしまいます。何か感じられた先生方やもっとこのようにすればよいのではないかといったご意見とご指導をお願いしたいと思っています。

最後になりますが，この「絵図」を通して，少しでも多くの生徒が，数学のアプローチの仕方に幅が広がり，その学習の一助になれればと思っています。また，彼ら彼女らが数学的な諸分野や諸概念を積み上げていく際にできる限り弊害が生じないように利用できないかと期待しているところもあります。

以上，ありがとうございました。

鶴迫 貴司　つるさこ たかし

大阪府生まれ。立命館大学理工学部数学物理学科卒業。同大学院修士課程修了。有名進学校を数校赴任し，現在，私立東山中学，高等学校で教壇に立つ。他府県の教育研究会などの講師を務め生徒向けの授業もしている。自ら作成した教材で授業実践をし，その中で，大学受験のみならず数学の面白さや参考書には掲載していない内容を紹介している。趣味はサーフィン。
e-mail:　t_tsurusako@higashiyama.ed.jp

授業実践記録

山口高校における Focus Gold の使用について

山口県立山口高等学校　真當良洋

　山口県立山口高等学校は，佐藤栄作元首相や詩人中原中也を始めとして多くの偉人を輩出している創立143年の伝統校であり，毎年200名程度の国公立大合格者を出す県内屈指の（と言っても他県の有名校には及ばないが）進学校である。一方で部活動も盛んで，運動部・文化部ともほぼ毎年いくつかの部が全国大会へ出場するという，文字通り文武両道を実践しているモデル校であると言っても過言ではない。本校の学習指導の特徴はいくつか挙げられる … 2学期制，65分5限授業，課外授業の充実，1日1題問題演習，大学研究（総合学習），… 取組には一長一短あろうが，現状や成果から見ると効果的であるといえる。総じて「生徒の面倒をよく見る学校」という印象であり，生徒・保護者の学校に対する評価や期待は高いが，その分教員は大変である（笑）。そんな本校でのFocus Goldの使用法について原稿を依頼されたので恐縮ではあるが，お引き受けした。とはいえ，他校とそんなに大差はないかもしれず，また私の稚拙な文章力のため，皆さまの参考にならないかもしれないことを最初にお断りしておく。悪しからずご了承いただきたい。

　本校でFocus Gold（以下FG）を導入したのは7年前，当時の1年担当者の発案による。以来本年度に至るまで継続してFGを使用している。生徒は授業に教科書と共にFGを持参する。FG中の例題を解説することや，例題や練習問題をプリントにして授業中に演習することもある。週間課題（月曜日に出題，翌月曜日提出）として指定することもある。試験範囲にも組み入れる。課外で使用することもある。生徒は休息時間や放課後また家庭学習等，頻繁に利用しているようである。問題や解説について質問に来る生徒も多々いる。いつも持ち歩いている。とにかく学習活動のいろいろな場面に教科書の傍らに置いて利用しているという感じだ。常に携帯するため，手垢で汚れ，紙も傷み，あの黒表紙は擦れて白っぽくなっている。冗談好きな教員から「黒いの，苦労いのぉ」（苦労するね　の山口弁）などとからかわれても，生徒の間には「この一冊やり込めば大丈夫！」みたいな信念めいたものがあり，手放さない。とにかく，生徒にとっても教員にとっても学習活動の大きな軸の一つになっている。

　昨年度の私の実践例を1つ紹介ことにする。

> 例題282〈格子点の問題〉
> p を自然数とするとき，次の条件を満たす整数の組(x, y)はいくつあるか。
> (2)　$x+2y\leqq 2p$，$y\geqq 0$，$x\geqq 0$
> （Focus Gold数学Ⅱ+B　p496）

　この問題を材料にして，徐々に応用問題へ発展させる展開を紹介する。この問題を（FGからの出題を伏せて）プリントして演習させると，大半の生徒は $x=k$ のときを（縦に集計して）数えようとして，手が止まる。k が奇数か偶数かにより直線上の点が含まれるかどうかが異なるからである。時間に余裕があれば，工夫するよう促して続行させる。すると，縦にこだわる者は $k=2m-1$ と $k=2m$ の場合に分けてそれぞれで Σ をとろうとする（これはこれで学習材料になる→ Σ をまとめて計算することは $x=k$ と $k+1$ のときをセットにして考えることとになり，それは後述《応用1》に繋がる）。気が利く者は $y=k$ のときを数える（横に集計する）とうまくいくことに気づき，にんまり勝ち顔で計算する。FGの解説ももちろん $y=k$ で数えて Σ をとっている。このページを見せると，縦に数えていた者は一様にハッとした顔をし，解説を食い入るように読む。そして視点を変えることの大切さを感じるのである。

　授業ではここまでにするが，課外において少し上級向けの講座では，これを踏まえて次のような応用問題を演習させる。

> 《応用1》
> $x\geqq 0$，$y\geqq 0$ かつ $\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}y\leqq m$ を満たす2次元格子点(x, y)の総数を求めよ。
> （2003　名古屋市立大）

この問題になると，縦横を変えてもうまくいかないので，“セット”で考える必要がある。$x=3k$，$3k+1$，$3k+2$ のときを1セットにして，k について $0\sim m-1$ までの Σ をとり，$x=3m$ のときの1個を加える，という方法で数えるとうまくいく。（もちろん別々に Σ をとってもいいし，他にも長方形状に数えて半分にする（直線上の点の加減に注意する）方法も有効であると思う。）

　格子点の問題はいろいろ派生問題が可能で，整数問題への応用《応用2》や，無理関数，対数関数等曲線への変更や，空間内格子点への応用等々，参考書や入試問題を漁るだけでも沢山あるのでいい教材になると思う。

> 《応用2》
> 直線 $37x-161y=1$ 上の格子点(x, y)のうち，$0\leqq x\leqq 1000$，$0\leqq y\leqq 1000$ であるものは何個あるか。

　直線上の格子点を見つけにくくした例である。ご存知の通り，解の1つは以下のようにユークリッドの互除法を利用して求めることができる。

$161=37\times 4+13$ …④　$37=13\times 2+11$ …③
$13=11\times 1+2$　…②　$11=2\times 5+1$　…①

①より　$1=11-2\times 5$
$=11-(13-11\times 1)\times 5$　（②）
$=11\times(1+1\times 5)-13\times 5$
$=(37-13\times 2)\times 6-13\times 5$　（③）
$=37\times 6-13\times(2\times 6+5)$
$=37\times 6-(161-37\times 4)\times 17$　（④）
$=37\times(6+4\times 17)-161\times 17$
$=37\times 74-161\times 17$

　よって，与えられた方程式の解の1つとして
　$x=74$，$y=17$
が存在する。これを利用して，
　$37(x-74)=161(y-17)$
より，一般解は
　$(x, y)=(161m+74, 37m+17)$
を得る。以下省略。

　ところでなぜFGはここまで本校生徒や教員から信頼を得ているのか？…いろいろあろうが，ざっくり言うと『生徒の多様性に対応できる』ことと『生徒の自主性をのばすことができる』ことであると私は分析している。本校でもご多分に漏れず“生徒の多様化”の問題は存在する。興味・関心，意識，意欲，能力…多様な生徒に対応するため，FGには様々な工夫が施されている。採り上げる問題の精選，解説，まとめ，補足，参考事項等，他の参考書と似て非なるものとなっている。特に3点，まず，解説中にゴテゴテと余計な書込みが少ないのがよい。生徒が必要と感じた時に，少し目を上下左右に移せば必要事項が記載されているという仕組みで，読み進めやすい設計になっている。次に，別解が多いのも大きな特徴である。いろいろなアプローチの方法があることは，発想力を育てたり，他分野との関連を意識させたりするいい仕掛けとなっている。また，コラムは意欲の高い生徒に刺激になるものや，理解の手助けするもの等バラエティに富んでおり，我々が読んでも興味深いものもある。何例かは私も授業でネタとして使わせていただいている。（今度是非，フラクタル図形と漸化式やマンデルブロ集合に関するコラムをお願いしたい。）

　私はFGのセールスマンではないので，批判的

な意見も少しは述べよう。FGは編集所の編者の方だけでなく，現場の高校の先生方の意見も多く取り入れられて編集されているということも，大きな特徴の一つである。これが諸刃の剣となる場合もある。先生方一人一人でコンセプトや指導法が異なるので，問題の精選や指針，ポイント等力加減についての意見は百者百様である。編者はそれらの最大公約数を見いだし編集されている…さぞかしご苦労も多いだろうと考えるが，苦労の一端を垣間見た最近の例では…

> 例題138〈極限と係数決定〉
> 次の等式が成り立つように定数 a，b の値を定めよ。
> (1)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{a\sqrt{x+5}-b}{x-1}=4$
> (Focus Gold数学Ⅲ　p316)

先生方も一度は経験がおありだろう，この種の問題の十分性の確認についてである。本校の教員の中にも，「この問題の解答は必要十分だから，十分性を述べることは数学を理解していない者の解答。不要だ！」という意見から「生徒に見分けはできないので，この問題でも十分性を述べるよう指導した方がよい。」という意見まで…，おそらく先生方にも様々な意見がおありだろう。そこでFGでは解説後，㊟の中で，

『例題138において「逆に」の確認を省略することもできるが，求めた値が条件を満たすかの確認は大切なことであるから，確認する習慣をつけておくとよい。』

と，なんとも歯切れの悪い記述となっており，生徒からも「どうすればいいのかわからない，結局要るの？要らないの？」と質問を受けたことがある。これも多くの先生方の意見を集約したためであろうが，それを推し量りながら読むと面白い，とは悪趣味か。あと，別冊解答はこれがベストなのか？いつもどこをめくればその問題があるのか苦労する。ここでは，本筋から外れるのでこのあたりで…。

いずれにせよ，本校でのFGの使用法についての概要は先述の通りである。効果も上げていると私は感じている（個人の感想です）。先生方のご参考になれば幸いである。今後益々FGが編集者や現場の先生方によって改訂が進められ，さらに完成度の高い「これ一冊やり込めば大丈夫！」と皆が確信できるバイブル的な存在になることを期待している。

真當 良洋　まとう よしひろ
九州大学理学部卒，48歳
現在　山口高等学校勤務
前山口県高教研数学部会理事長・
山口県数教高校部会代表

授業
実践記録

高校教育における実践での工夫と改善

前埼玉県立川越南高等学校長　関根宏

1．はじめに

数学の学習について様々な角度から研究され論じられてきました。私もかつて学習心理や性格分析から，学力向上の要因について探ったこともありますが，明確にその要因を発見するまでには至りませんでした。

また数学教育におけるコンピュータ利用について，グラフを描ける表計算ソフトを用いて，生徒に考察させ，問題解決を図るなどのことも試みました。それらは日常生活との関連や視覚的な見方を通して生徒への学習への興味づけはできたものの，「受験数学」という大きな壁を超えた新たな指導には至りませんでした。

しかし，教材の工夫や生徒の学習歴等を踏まえたきめ細やかな個別指導により，生徒の学習意欲が高まり，生徒が学習に納得することで，飛躍的な学力向上が図られる貴重な体験を経験しました。それは私の数学教育実践における大きな財産となっています。

ここで，いくつか，その具体的な教材開発や実践例等を述べることにします。

2．「数」の性質を活用する

高校数学において，小学校・中学校で学習してきた「数」の範囲は複素数，さらには「行列」まで拡がります。それらの「数」について，その意味を理解し，その性質を深く学習するには，具体的な「数」の扱いに止まらず，「数」を文字に置き換える中で，生徒が数の性質をどこまで身近なものとして捉え，活用できるかが大切に思います。

(1) 文字を数と同様に身近なものとする工夫

小学校では，自然数，零，整数，小数，分数と，数字による四則演算の問題が課せられます。そこでは答えが一つの「数」として明確に実感できたと思います。

中学校では数式だけでなく，文字式で表現される問題を多く学習します。そこで扱われる文字が整数や有理数，さらには無理数と，実数の範囲までの「数」と同じように学習しますが，多くの生徒には，それが実感できないまま高校生となることが多いようです。

高校ではさらに「文字」を不等式などを用いて，ある「数」として扱う定義をしますが，そのことが十分に理解できず，その数の性質を活用できるまでに至っていない生徒をよく見かけます。

そこで中学校時代に文字式の演習を徹底することで，「文字」が「数」と同じように身近なものとして扱われるようにすることが重要に思います。

例えば，身近な数の計算問題について，その仕組みを，文字を用いて簡単に証明できる，次のような問題があります。

◇「二桁の掛算の計算問題で，十の位同士が同じ数で，一の位同士は加えて 10 となる場合の問題」です。

つまり「$15\times15(=225)$，…，$37\times33(=1221)$，…」となる問題です。

例えば，「65×65」について説明すると，

まず「十の位の片方に 1 を加え，それぞれの数値を掛算します。

$6\times(6+1)=42$ ……①

次に一の位同士を掛算します。

$5\times5=25$　　……②

そして，次に①，②の値を順に並べて書くと，4225 になります。」（証明は略します。）

この計算知識は，平方根，数列の問題を解く過程でも，具体的な数値を予測するときに，とても便利なものです。

(2) 2次方程式の解を視覚的に捉える工夫

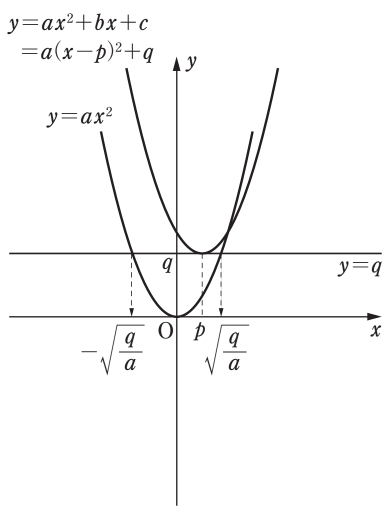
高校では2次方程式の解として，虚数解が新たに扱われます。そこで中学校までの「数」の世界が，実数から複素数の世界へと拡張されます。

しかし，その定着はなかなか難しい面があります。実数解は x 軸との共有点として具体的にイメージでき，実感できますが，虚数解は当然ながら x 軸上で視覚的に示すことは不可能です。そのことが虚数解に対するイメージを弱め，生徒の定着を阻害しているように思われます。

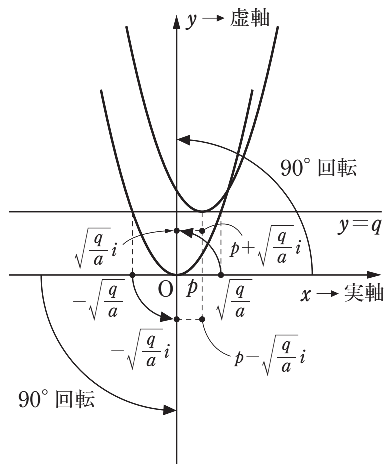
そこで，虚数解を作図を通して，座標平面で視覚的に捉える工夫を紹介します。

まず，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の左辺を2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフとして描きます。

次に，$y=a(x-p)^2+q$ と式を変形し，2次関数のグラフの頂点の y 座標 $y=q$ を求めます。



さらに，直線 $y=q$ と2次関数 $y=ax^2$ のグラフの交点の x 座標を x 軸上で示し，それを原点を中心に90度回転させ，当初の y 軸上に重ね，その軸を虚軸とすることで，その軸上に解の虚数部 $\pm\sqrt{\dfrac{q}{a}}\,i$ を示します。こうすることで虚数解が点 $\left(p,\ \pm\sqrt{\dfrac{q}{a}}\,i\right)$ として複素平面上で具体的に示すことができます。



解の示し方の手順はやや複雑となりますが，虚数解が平面上で目に見えるようになるので，生徒にとって，虚数解の定着は深まると思います。

(3) 実数の性質を活用することを意識させる工夫

高校数学では，条件がシンプルな中に，実数の性質を利用して解かせる問題があります。しかしそれに気づかず諦めてしまうことがよくあります。そこで，日頃の学習の中で，実数についての性質を意識することはきわめて重要です。

その性質は言うまでもないですが，「2乗すれば正または0である。」ということです。

それをしっかり学習する機会は2次関数であり，そこでの標準形への式変形，そして，なによりもそこで描かれたグラフからその性質を学ぶことです。一目瞭然で，実数の性質（2乗すると正または0）を視覚的に捉えることができると思います。

その応用は実数解の判別式に止まらず，「不等式の証明問題」や「式の値のとり得る範囲を求める問題」を解くキーポイントである，「数式から，どのように括弧の2乗の形をつくるか」

⇒「$(\text{実数})^2\geqq 0$」

につながります。

3．既習事項を踏まえて発展させる工夫

数学の学習において，既習事項の積み重ねが，きわめて重要であるとよく言われます。それはどの教科の学習においても程度の差こそあれ同様に言えることですが，次に述べるような数学の学習内容において，特に意識しておくべき例であると考えます。

(1) 直線を新たに定義する意味

高校数学では，中学校で習った直線について，再び定義のし直しがなされます。それは直線を平面から空間へと拡げるために必要なことですが，その理由をしっかり説明しないと生徒の学習に戸惑いが生じます。直線を2次元から3次元へと拡張するために必要なことですが，それを生徒に納得させて学習させることは大切に思います。

(2)「行列」を「数」の拡張として捉える工夫

今度の教育課程から「行列」が，従来のような扱いではなく「数学活用」での扱いとなったのはやや残念に思います。しかしその導入にあたって，かつて私自身難しさを感じたこともあります。数学での新たな分野を授業で扱う場合，できる限り既習事項を踏まえ，生徒が理解しやすいように導入を図りますが，行列の導入ではそれが難しいものでした。そのことがいつも気になっていましたが，その後，数学史（※）の中に，新たな導入となるヒントを得た記憶があります。

それは，複素数からの数の拡張として，行列の導入を図るというものです。

まず，複素数 $a+bi$ を $(a,\ b)$ という順序対で表します。そこで，a は $(a,\ 0)$，bi は $(0,\ b)$ となります。

次に，その表記の発展として，行列を用いて，$a=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$，$bi=\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ と表すことで，複素数は，$a+bi=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ となる行列で示されます。

こうすることで，複素数の演算が，行列を通して，実数による演算にとって代わることが容易に分かります。

ここに「数」の拡張として，「行列」を学習する意味が見えてくるように思います。

※「思想の中の数学的構造（山下正男）」

今後，いつの日か，「行列」，「群」などの内容が，高校数学の中でしっかりと位置づけがなされることを期待しています。それらはグラフ理論や方程式の解の存在の証明など，高校数学の魅力的な新たな発展へとつながるように思います。

4．おわりに

今回，紹介できなかった項目を挙げると次のようなものがあります。

(1) 数学史に関する内容
　① ギリシア人の数に対する考え方
　② 数式展開と古代ギリシア数学

(2) ガウスと数学
　① 和の計算の工夫（全体と順序）
　② 非ユークリッド幾何にまつわる話題
　　（※彼の業績と人柄）
　※「近世数学史談（高木貞治）」

(3) 演習問題から見える数学の魅力
　① 円と直線
　　（数式と図形，双方から見るバランス）
　② 円と接線
　　（数式を読み取る魅力）

(4) 三角比から三角関数
　① 定義と角の拡張
　② 日常生活と三角関数
　　（測量，バイオリズム）

今後とも，さらに生徒の数学への学習を意欲を高めるため，様々な工夫やアイデアを考え，学校現場に生かす道を模索していきたいと思っております。

関根 宏 せきね ひろし
現在　公益財団法人　日本教育公務員弘済会埼玉支部勤務。
前埼玉県立川越南高等学校

複素数平面の有用性を考える（その3）

Focus Gold・Focus Up
編集委員

豊田 敏盟
Toshiaki Toyoda

複素数平面での「変換」は，他の章にはない妙味があります。新課程用Focus Gold数学Ⅲ「複素数平面」にも各種の「変換」に関する様々な例題・練習・コラム等が掲載され，直線や円や領域がどのような図形に移るかが，丁寧に解説されています。

ところで，1つの変換に対し，変換される前の図形の位置や大きさを変えると全く異なる図形になることも「変換」の面白さであり，サプライズを招きます。

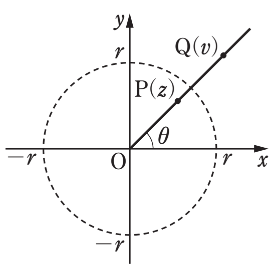
そこで，本稿では変換 $w=\dfrac{1}{z}$ を用いて，その妙味を味わってみましょう。

本稿のテーマ

> 複素数平面上で，点 z の逆数 $\dfrac{1}{z}$ によって定まる図形の変換を考える

逆数 $\dfrac{1}{z}$ による変換に入る前に，これによく似た「反転」について触れておきます。

【反転の定義】



平面上に定点 O を中心とし，半径 r（一定）の円がある。この定点 O と異なる点 P に対し，O を端点とする半直線 OP 上の点 Q が，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=r^2$ を満たすとき，点 $\mathrm{P}(z)$ を点 $\mathrm{Q}(v)$ に移す変換のことを，「反転」という。また，定点 O を「反転の中心」，r を「反転の半径」とよぶ。

複素数平面上の単位円に関する反転（反転の中心は原点 O，反転の半径は 1）について，点 $\mathrm{P}(z)$ と点 $\mathrm{Q}(v)$ の z と v の関係は次のとおりです。

$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=1^2$ より，$|z|\cdot|v|=1$ で，

$|\overline{z}|=|z|$ であるから，

$$|v\cdot\overline{z}|=|v|\cdot|\overline{z}|=|v|\cdot|z|=1 \quad \cdots\cdots(※)$$

点 Q は半直線 OP 上にあるから，$\arg v=\arg z$

また，$\arg z=-\arg\overline{z}$ であるから，

$$\arg v=-\arg\overline{z}$$

よって，$\arg v\overline{z}=\arg v+\arg\overline{z}=0$

ゆえに，$v\overline{z}$ は正数です。

したがって，(※) より $v\overline{z}=1$ から，$v=\dfrac{1}{\overline{z}}$ となります。

このように，単位円に関する反転により，点 $\mathrm{P}(z)$ は半直線 OP 上の $\mathrm{OQ}=\dfrac{1}{|z|}$ である点 Q に移ります。

次に，複素数平面において，点 $z(\neq 0)$ に対し，z の逆数による変換 $w=\dfrac{1}{z}$ を「鏡映の反転」と言います。

「鏡映の反転」の変換による点 w は，点 $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ とすると，

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{|z|(\cos\theta+i\sin\theta)}$$

$$=\frac{1}{|z|}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$$

より，点 z を実軸に関して対称に移動し，その絶対値を $\dfrac{1}{|z|}$ とした点です。（啓林館発行教科書「詳説数学Ⅲ」P.87 研究を参照）

つまり，「反転」も「鏡映の反転」も，単位円の内部の点は単位円の外側に移動し（それも原点間近な点は無限遠点に飛び），単位円の外部の点は単位円の内側に移動します（それも無限遠点は原点間近の点に集まる）。また，移動の方向は，「反転」の場合は原点から見て点 z と同じ方向，「鏡映の反転」の場合は原点から見て点 $\overline{z}$ と同じ方向です。

1.「鏡映の反転」による直線の変換

(i) 原点を通らない直線はどのような図形に移るか。

【解】

原点 O と異なる点 $\mathrm{A}(\alpha)$ を通り直線 OA に垂直な直線 l の「鏡映の反転」による変換を考える。

直線 l 上の点 A と異なる任意の点 $\mathrm{P}(z)$ について $\mathrm{OA}\perp\mathrm{AP}$ より，

$$\arg\frac{z-\alpha}{\alpha}=\pm\frac{\pi}{2}$$

よって $\dfrac{z-\alpha}{\alpha}$ は純虚数または 0 で，

$$\frac{z-\alpha}{\alpha}=-\overline{\left(\frac{z-\alpha}{\alpha}\right)}$$

が成り立つ。

これを整理すると，$\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}=2\alpha\overline{\alpha}$

これが直線 l の方程式である。

ここに変換 $w=\dfrac{1}{z}\,(z\neq 0)$ より，$z=\dfrac{1}{w}$ を代入すると，$\overline{\alpha}\dfrac{1}{w}+\alpha\dfrac{1}{\overline{w}}=2\alpha\overline{\alpha}$ で，

$$\alpha w+\overline{\alpha}\overline{w}=2(\alpha\overline{\alpha})w\overline{w}$$

を得る。

両辺を $2\alpha\overline{\alpha}\,(\neq 0)$ で割って整理すると，

$$w\overline{w}-\frac{1}{2\overline{\alpha}}w-\frac{1}{2\alpha}\overline{w}=0$$

よって，$\left(w-\dfrac{1}{2\alpha}\right)\left(\overline{w}-\dfrac{1}{2\overline{\alpha}}\right)=\dfrac{1}{4\alpha\overline{\alpha}}$

つまり，$\left|w-\dfrac{1}{2\alpha}\right|^2=\dfrac{1}{4|\alpha|^2}$ から，

$$\left|w-\frac{1}{2\alpha}\right|=\frac{1}{2|\alpha|}$$

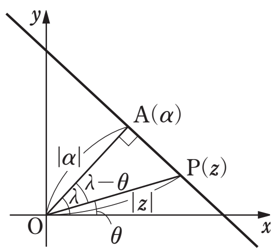
が成り立つ。

したがって，直線 l は点 $\dfrac{1}{2\alpha}$ を中心とし，半径 $\dfrac{1}{2|\alpha|}$ の円に移る。ただし，原点を除く。（原点 O を通らない直線は，原点を通る円に移る。）

【別解】

$\alpha=|\alpha|(\cos\lambda+i\sin\lambda)$，

$z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$



とすると，$\angle\mathrm{OAP}=\dfrac{\pi}{2}$，

$\angle\mathrm{AOP}=|\lambda-\theta|$ より，

$|z|\cos(\lambda-\theta)=|\alpha| \quad \cdots\cdots①$

点 $\mathrm{Q}(w)$，

$w=|w|(\cos\phi+i\sin\phi)$ とすると，

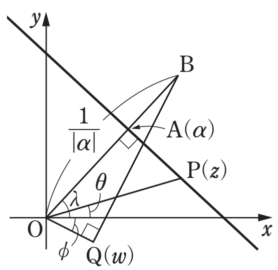
$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{|z|}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$$

より，$|w|=\dfrac{1}{|z|}$，$\phi=-\theta$

よって，①は，$\dfrac{1}{|w|}\cos(\lambda+\phi)=|\alpha|$

つまり，$\dfrac{1}{|a|}\cos(\lambda+\phi)=|w|$

直線 OA 上に



$\mathrm{OB}=\dfrac{1}{|a|}$ となる点 B を定めると，右図より，

$\angle\mathrm{BOQ}=\lambda+\phi$，

$\angle\mathrm{OQB}=\dfrac{\pi}{2}$

したがって，点 $\mathrm{Q}(w)$ は線分 OB を直径とする円周上にある。

(ii) 原点を通る直線はどのような図形に移るか。

【解】

複素数平面上に原点 O と異なる点 $\mathrm{B}(\beta)$ を定め，直線 OB を l' とする。

直線 l' 上の任意の点 $\mathrm{P}(z)\,(z\neq 0)$ について，O, B，Pは一直線より，$\arg\dfrac{z}{\beta}=0$ または π

よって，$\dfrac{z}{\beta}$ は実数で，$\dfrac{z}{\beta}=\overline{\left(\dfrac{z}{\beta}\right)}$ から，

$\bar{\beta}z=\beta\bar{z}$

これが直線 l' の方程式である。

ここに，変換 $w=\dfrac{1}{z}\ (z\neq 0)$ から，$z=\dfrac{1}{w}$ を代入すると，$\bar{\beta}\dfrac{1}{w}=\beta\dfrac{1}{\bar{w}}$ で，

$\beta w=\bar{\beta}\bar{w}=\overline{(\beta w)}$

を得る。

よって，βw は実数。

つまり，$\arg\beta w=0$ または π から，

$\arg w=-\arg\beta$ または $\pi-\arg\beta$

よって，原点O，点B(β)と実軸に関して対称な点，点 w は同一直線上にある。

したがって，直線 l' は実軸に関して対称な直線に移る。ただし，原点は除く。（原点Oを通る直線は，実軸に関してそれと対称な直線に移る。）

2. 「鏡映の反転」による円 $|z-\beta|=a\ (a>0,\ \beta$ は複素数）の変換

複素数平面上の点 β を中心とする半径 a の円 $|z-\beta|=a\ (a>0)$ は，変換 $w=\dfrac{1}{z}$ でどのような図形に移るか調べてみる。

$w=\dfrac{1}{z}$ より，$z=\dfrac{1}{w}$ を $|z-\beta|=a$ に代入すると，

$$\left|\frac{1}{w}-\beta\right|=a$$

よって，$\dfrac{|\beta w-1|}{|w|}=a$ ……②

（i） $\beta\neq 0$ のとき

②は $|\beta|\left|w-\dfrac{1}{\beta}\right|=a|w|$ より，

$|\beta|:a=|w|:\left|w-\dfrac{1}{\beta}\right|$

よって，$a=|\beta|$ なら，$|w|=\left|w-\dfrac{1}{\beta}\right|$ で，原点Oと点A$\left(\dfrac{1}{\beta}\right)$ を結ぶ線分の垂直二等分線である。（原点Oを通る円は，原点を通らない直線に移る。）

$a\neq|\beta|$ なら，原点Oと点A$\left(\dfrac{1}{\beta}\right)$ を結ぶ線分OAを $|\beta|:a$ に内分する点と外分する点を直径の両端とする円（アポロニウスの円）である。（原点Oを通らない円は原点を通らない円に移る。）

（ii） $\beta=0$（円の中心が原点O）のとき

②は，$\dfrac{1}{|w|}=a$ より，$|w|=\dfrac{1}{a}\ (a>0)$

よって，原点を中心とする半径 $\dfrac{1}{a}$ の円である。（中心が原点Oにある円は，中心が原点Oにある円に移る。）

【補足】複素数平面上の点を「鏡映の反転」と「単位円に関する反転」によって移した場合，移動後の点は互いに実軸に関して対称であるから，直線や円を「単位円に関する反転」で移す場合も次のことが成り立ちます。

- 反転の中心Oを通る直線は，同じ直線に移る。
- 反転の中心Oを通らない直線は，Oを通る円に移る。
- 反転の中心Oを通る円は，Oを通らない直線に移る。
- 反転の中心Oを通らない円は，Oを通らない円に移る。

(反転の詳しい解説は，新課程用FocusGold数学Ⅲ P.191 Columnを参照)

3. 「鏡映の反転」による双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ の変換

座標平面上の双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ を複素数平面に重ねる。その双曲線上の任意の点をP(z)とすると，$z=x+yi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

x，y は実数より，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ であるから，双曲線の式は，

$$\frac{r^2\cos^2\theta}{a^2}-\frac{r^2\sin^2\theta}{b^2}=r^2\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}-\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)=1 \quad \text{……③}$$

となる。また，変換 $w=\dfrac{1}{z}$ により，点P(z)が点Q(w)に移るとし，$w=R(\cos\phi+i\sin\phi)$ とすると，$R=\dfrac{1}{r}$，$\phi=-\theta$ となる。

これより，③に $r=\dfrac{1}{R}$，$\theta=-\phi$ を代入して，

$$\frac{1}{R^2}\left(\frac{\cos^2\phi}{a^2}-\frac{\sin^2\phi}{b^2}\right)=1$$

から，$R^2=\dfrac{\cos^2\phi}{a^2}-\dfrac{\sin^2\phi}{b^2}$ ……④

を得る。

半角の公式により，④は

$$R^2=\frac{1+\cos2\phi}{2a^2}-\frac{1-\cos2\phi}{2b^2}$$

$$=\frac{b^2-a^2}{2a^2b^2}+\frac{a^2+b^2}{2a^2b^2}\cos2\phi$$

となる。ただし，偏角 ϕ は $R^2>0$ を満たすものとする。

（④を座標平面上での式で表してみる。

④の両辺に $R^2\neq 0$ を掛けると，

$R^4=\dfrac{R^2\cos^2\phi}{a^2}-\dfrac{R^2\sin^2\phi}{b^2}$

$w=X+Yi$（X，Y は実数)とおくと，

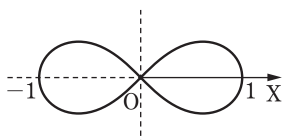
$R\cos\phi=X$，$R\sin\phi=Y$，$R^2=X^2+Y^2$

より，座標平面での式は，

$(X^2+Y^2)^2=\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Y^2}{b^2}$

となる。）

（i） $a=b$(直角双曲線)の場合



$R^2=\dfrac{1}{a^2}\cos2\phi$

（レムニスケート）となる。

$\left(\text{座標平面での式は，}(X^2+Y^2)^2=\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Y^2}{a^2}\right)$

$a=b=1$ の場合のグラフは上図のとおり。

（ii） $a\neq b$ の場合

座標平面での式は

$(X^2+Y^2)^2=\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Y^2}{b^2}$

となる。

たとえば，$a=1$，$b=\dfrac{1}{2}$ とすると，

$(X^2+Y^2)^2=X^2-4Y^2$

となり，グラフはレムニスケートに近い図である。

座標平面上の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ の「鏡映の反転」による変換は，この双曲線の変換と同じように考えればよく，変換後の図形は，$a=b$（円）の場合，前記2のとおり円になる。$a\neq b$ の場合はカッシーニの楕円に近い図に移る。

では，放物線 $y^2=4mx+n\ (m>0)$ は「鏡映の反転」によってどのような図形に移るか。これについては，みなさんにぜひ確かめていただきたいと思います。私が考えた解説は次回，ご案内します。

4. 極方程式 $r=\dfrac{ae}{1+e\cos\theta}\ (a>0,\ e$ は離心率）で表される2次曲線の「鏡映の反転」による変換

極座標平面の極Oを2次曲線の焦点に定める。

点A$(a,\ 0)\ (a>0)$ を通り始線に垂直な直線を準線とする2次曲線

$r=\dfrac{ae}{1+e\cos\theta}$（$e$ は離心率） ……⑤

の「鏡映の反転」による変換を考える。

極座標平面と複素数平面を，極が原点に，始線が実軸になるように重ね，2次曲線⑤上の任意の点をP(z)とすると，z の極形式は

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ と表せる。

また，変換 $w=\dfrac{1}{z}$ により，点P(z)が点Q(w)に移るとし，$w=R(\cos\phi+i\sin\phi)$とすると，

$R=\dfrac{1}{r}$，$\phi=-\theta$ となる。

⑤に $r=\dfrac{1}{R}$，$\theta=-\phi$ を代入して，

$$\frac{1}{R}=\frac{ae}{1+e\cos\phi}$$

よって,

$$R=\frac{1+e\cos\phi}{ae}=\frac{1}{ae}+\frac{1}{a}\cos\phi$$

これが点 $\mathrm{Q}(w)$ の極方程式である。

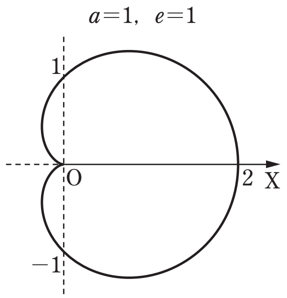
したがって,点 $\mathrm{Q}(w)$ の描く図形は,

(i) $e=1$(放物線)

のとき,

$ae=a(>0)$

であるからカージオイドである。

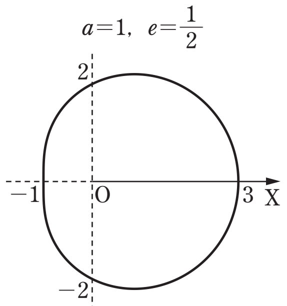


(ii) $0<e<1$(楕円)

のとき,

$$0<\frac{1}{a}<\frac{1}{ae}$$

であるから,リマソン1重ループである。

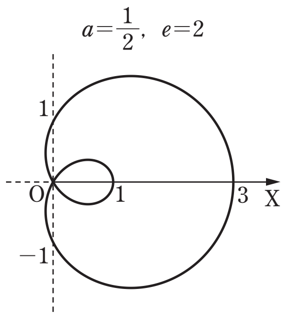


(iii) $1<e$(双曲線)

のとき,

$$0<\frac{1}{ae}<\frac{1}{a}$$

であるから,リマソン2重ループである。



本稿での「鏡映の反転」による変換は,座標平面,複素数平面,極座標平面をそれぞれ重ね,点の対応関係

$$(x,\ y)\longleftrightarrow z=x+yi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$\longleftrightarrow (r,\ \theta)$$

を使って式変形を行いました。変換後の式は,複素数平面での表現にこだわらず,そのグラフを主に扱う単元での式表現としました。また,変換後の式が,グラフ化しにくい x,y の高次式や極方程式になった場合は,関数グラフソフトGRAPESを用い,その概要を把握しました。雑ぱくな解説に終始しましたが,数学指導でお役にたてば幸いです。

授業のワンポイントレッスン(その1)

Focus Gold・Focus Up 編集委員
竹内 英人
Hideto Takeuchi

高校数学で学ぶさまざまな内容についてスポットを当て,指導上のポイントや留意点などを考え,シリーズとしてお伝えしていきたいと思います。とくに若い先生方は日々の授業において,いろいろと「数学ネタ」を探していることと思います。そんな先生方にとって1つのヒントになれば幸いです。

さて,今回は新課程から導入された「複素数平面」について触れてみたいと思います。発展的な内容については,豊田先生の記事にお任せすることにして,ここでは基本的な内容を教科書とは少し異なった視点で考えてみましょう。

今,2つの複素数 z_1,z_2 を $z_1=x_1+y_1i$,$z_2=x_2+y_2i$ (x_1,y_1,x_2,y_2 は実数) と定めたとき,2つの複素数は実数の順序対 $(x_1,\ y_1)$,$(x_2,\ y_2)$ によって決まります。そこで,この順序対を座標と対応させて考えるとき,この座標平面を「複素数平面(ガウス平面)」というのでした。この対応によって,

複素数 ⟷ 座標 ⟷ (O を始点とした) ベクトル

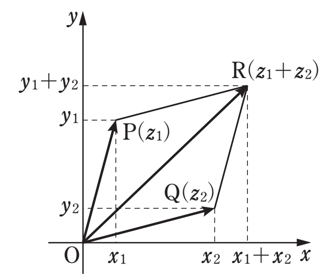
と考えることができるので,複素数の演算と座標(ベクトル)の演算が対応することが分かります。

和と差については簡単です。ここでは和について考えます。

$\mathrm{P}(z_1)$,$\mathrm{Q}(z_2)$ とします。

$$z_1+z_2=(x_1+y_1i)+(x_2+y_2i)$$
$$=(x_1+x_2)+(y_1+y_1)i$$

一方,$(x_1,\ y_1)+(x_2,\ y_2)=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$ より,z_1+z_2 は2つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$,$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の和 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ として表されます。(差はベクトルの差)



問題は積です。というのも,2つの複素数 z_1,z_2 の積は,

$$z_1z_2=(x_1+y_1i)(x_2+y_2i)$$
$$=(x_1x_2-y_2y_1)+(x_1y_2+y_1x_2)i$$

と定義することができますが,一方,2つの座標 $(x_1,\ y_1)$,$(x_2,\ y_2)$ に対しては座標の積というものは定義されていません。つまり,「複素数の和は座標(ベクトル)の和」のように単純に図形的な解釈はできません。

そこで,教科書では,複素数の新たな表現方法として「極形式」$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ が登場するわけですが,生徒から見ると,いきなり「極形式」が登場し,なぜ,このような新たな表現(形式)が必要なのか疑問に思うのではないでしょうか。そのため,ここではひとまず複素数の積について,$z=x+yi$ を用いて考えてみましょう。

今,$z_1z_2=(x_1+y_1i)(x_2+y_2i)$

$$=x_2(x_1+y_1i)+y_2i(x_1+y_1i)$$
$$=x_2(x_1+y_1i)+y_2(-y_1+x_1i)\quad\cdots\cdots①$$

ここで,x_1+y_1i と $-y_1+x_1i$ はそれぞれ

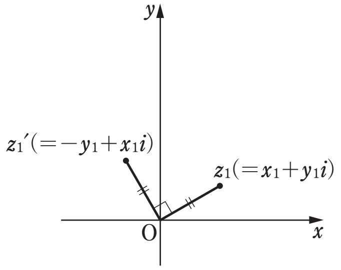
$$x_1+y_1i\longleftrightarrow(x_1,\ y_1)$$
$$-y_1+x_1i\longleftrightarrow(-y_1,\ x_1)$$

に対応しており,

$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-y_1\\x_1\end{pmatrix}=-x_1y_1+y_1x_1=0$

より，$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}-y_1\\x_1\end{pmatrix}$

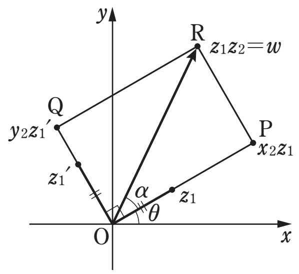
よって，$-y_1+x_1i=z'_1$ とおくと，z'_1 は複素数平面において z_1 を O を中心に 90° 回転した点である。



このとき，①より，

$z_1z_2=x_2z_1+y_2z'_1$

これを図示すると次のようになる。(ここでは，$x_2>1$，$y_2>1$ として図をかく。)



図において，$|z_1|=|z'_1|$ より，

$OP=x_2|z_1|$，$OQ=y_2|z'_1|=y_2|z_1|$，

$\angle RPO=90^\circ$ より，

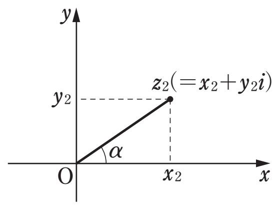
$OR=\sqrt{OP^2+PR^2}=\sqrt{OP^2+OQ^2}$

$=\sqrt{x_2^2|z_1|^2+y_2^2|z_1|^2}=\sqrt{x_2^2+y_2^2}\,|z_1|$

$=|z_2||z_1|$

また，$\angle ROP=\alpha$ とおくと，

$\tan\alpha=\dfrac{PR}{OP}=\dfrac{OQ}{OP}=\dfrac{y_2|z_1|}{x_2|z_1|}=\dfrac{y_2}{x_2}$



よって，α は $\angle z_2OX=\alpha$ を満たす。

以上より，$z_1z_2=w$ とすると，$w=z_1z_2$ は複素数平面上において，

$\begin{cases}\angle wOX=\angle z_1OX+\angle z_2OX\\ |w|=|z_1||z_2|\end{cases}$

を満たす点である。

以上の考察より，複素数の積は，

2つの複素数の$\begin{cases}\text{絶対値の積}\\ x\text{ 軸となす角（偏角）の和}\end{cases}$

によって定まることが分かる。

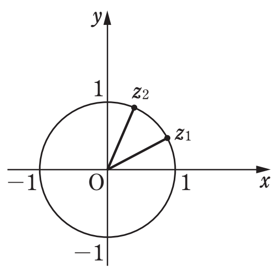
このように考えれば，複素数の積を考えるとき，2つの複素数を絶対値と偏角で表される極形式で考えるのは自然な発想と言える。しかし，ここまで来ても，なぜ，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ と表すのかは，ハッキリしません。そこで，もう少し詳しく分析してみましょう。

$z_1z_2=(x_1+y_1i)(x_2+y_2i)$

$=(\underline{x_1x_2-y_1y_2})+(\underline{x_1y_2+y_1x_2})i$ ……②

について，〰〰，＿＿＿の部分に注目すると，何か連想することはないだろうか。

今，z_1，z_2 が複素数平面上の単位円周上の点であったとする。



$\begin{cases}\angle z_1OX=\theta_1\\ \angle z_2OX=\theta_2\end{cases}$ とすると，

$\begin{cases}x_1=\cos\theta_1\\ y_1=\sin\theta_1\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=\cos\theta_2\\ y_2=\sin\theta_2\end{cases}$ とおける。

このとき，加法定理より，

$\underline{x_1x_2-y_1y_2}=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2$

$=\cos(\theta_1+\theta_2)$

$\underline{x_1y_2+y_1x_2}=\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2$

$=\sin(\theta_1+\theta_2)$

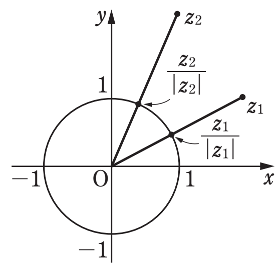
よって，②$\longleftrightarrow$

$z_1z_2=(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$=\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\cdots(*)$

という美しい関係式が成り立つ。

では，z_1，z_2 が単位円周上にない場合はどうするか。(ここでは，z_1，z_2 が単位円の外部，すなわち $|z_1|>1$，$|z_2|>1$ の例で考える。)



このとき，$\dfrac{z_1}{|z_1|}$，$\dfrac{z_2}{|z_2|}$ は単位円周上より，

$\angle z_1OX=\theta_1$，$\angle z_2OX=\theta_2$ とおくと，

$\begin{cases}\dfrac{z_1}{|z_1|}=\cos\theta_1+i\sin\theta_1\\ \dfrac{z_2}{|z_2|}=\cos\theta_2+i\sin\theta_2\end{cases}$ ……(＊＊)

ここで，$|z_1|=r_1$，$|z_2|=r_2$ とおくと，

$\begin{cases}z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\\ z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\end{cases}$ ……③

と表せる。

一方，(＊)，(＊＊) より，

$\dfrac{z_1}{|z_1|}\cdot\dfrac{z_2}{|z_2|}=\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)$

であるから，

$z_1z_2=|z_1||z^2|\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

$=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$ ……④

以上③，④より

$\begin{cases}z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\\ z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\end{cases}$ とおくと

$z_1z_2=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$ ……⑤

すなわち，$\begin{cases}|z_1z_2|=|z_1||z_2|\\ \arg z_1z_2=\arg z_1+\arg z_2\end{cases}$

が成り立つことが分かる。

先にも述べたが，教科書ではいきなり，

$\begin{cases}z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\\ z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\end{cases}$

とおき，

$z_1z_2=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$=r_1r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)$

$+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)\}$

$=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

(∵加法定理)

として導いている。

しかし，この考え方の背景には，

②の〰〰，＿＿＿の形から，加法定理を連想するというアイディアが存在する。

このあたりが分かっていないと，本当の意味での極形式の必然性が見えてこない。

このような教科書の行間を，いかに埋めるかが教師の腕の見せ所であり，生徒に「真の基礎とは何か」を考えさせるきっかけになるのではないでしょうか。

ちなみに，$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$ を x_1，y_1，x_2，y_2 で表すと，

$\sqrt{(x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2+y_1x_2)^2}$

$=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}$

よって，

$(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)$

$=(x_1y_2+y_1x_2)^2+(x_1x_2-y_1y_2)^2$

となる。

これは有名な「ラグランジュの恒等式」であり，

$\vec{p}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$，$\vec{q}=\begin{pmatrix}y_1\\x_1\end{pmatrix}$ としたとき，

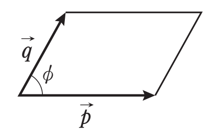
$|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2=(\vec{p}$ と $\vec{q}$ の内積$)^2$

$+(\vec{p}$ と $\vec{q}$ で作る平行四辺形の面積$)^2$

が成り立ち，ここで，$\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角を ϕ とすると，

$|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2=(|\vec{p}||\vec{q}|\cos\phi)^2+(|\vec{p}||\vec{q}|\sin\phi)^2$

よって，$\cos^2\phi+\sin^2\phi=1$ なども導くことができる。



このように，一つの話から色々なより道をすることで，より一層数学の面白さを伝えることが出来るのではないでしょうか。

真の数学力が身につく

Focus Gold 新課程
フォーカス・ゴールド

A5判
3色刷

数学I+A, 数学II+B
数学II, 数学III

1. 『先に進める学習』と『基本も押さえる』に応えた「マスター編」
フォローアップ（進める学習）とフィードバック（振り返り学習）で入試に必要な学力が確実に身につきます。

2. 充実したコラム
数学への興味や知識の深まりなどが感じられる内容になっています。

入試に必要な「数学の本質」が確実に身につく

システム数学　2015年入試必修問題集シリーズ

- 河合塾の徹底した入試分析で良質の問題を厳選
- 難関国公私立大学の入試に対応した『実戦』と国公私立大学の入試に対応した『練磨』の２シリーズ発刊
- 入試に必要な重要問題で構成したテーマ別問題と，最近の傾向で学習できる総合演習問題の２部構成

実　戦	数学I·II·A·B　A5判	192頁／定価630円（本体600円） 【解答（別冊）】A5判／276頁／定価500円（本体476円）
実　戦	数学III　A5判	116頁／定価490円（本体467円） 【解答（別冊）】A5判／180頁／定価520円（本体495円）
練　磨	数学I·II·A·B　A5判	152頁／定価600円（本体571円） 【解答（別冊）】A5判／168頁／定価300円（本体286円）
練　磨	数学III　A5判	96頁／定価400円（本体381円） 【解答（別冊）】A5判／100頁／定価250円（本体238円）

理数教育の未来へ
啓林館
http://www.shinko-keirin.co.jp/

〒543-0052　大阪市天王寺区大道4-3-25　TEL.06-6779-1531　FAX.06-6779-5011
〒113-0023　東京都文京区向丘2-3-10　TEL.03-3814-2151　FAX.03-3814-2159
〒003-0005　札幌市白石区東札幌5条2-6-1　TEL.011-842-8595　FAX.011-842-8594
〒461-0004　名古屋市東区葵1-4-34 双栄ビル2F　TEL.052-935-2585　FAX.052-936-4541
〒732-0052　広島市東区光町1-7-11 広島CDビル5F　TEL.082-261-7246　FAX.082-261-5400
〒810-0022　福岡市中央区薬院1-5-6 ハイヒルズビル5F　TEL.092-725-6677　FAX.092-725-6680

20131201