啓林館 高校数学 教育情報誌

啓林館

Focus Gold 通信

フォーカスゴールド

［特集］ p.2-13

難関大学への数学の学習法について
～2013東大・京大入試問題を振り返って～

Focus Gold・Focus Up編集委員　竹内 英人

複素数平面の有用性を考える(その1)　p.14－17

Focus Gold・Focus Up 編集委員　豊田 敏盟

授業実践記録 p.18-24

◆ SSH校での「数学活用」の取り組み実践例

茨城県立日立一高等学校　沢畑 雅彦

◆ 基本公式の活用例としての掛算の新しい方法（2桁九九の話）

学校法人富田学園　岐阜東高等学校　亀井 喜久男

vol.5

特集

難関大学への数学の学習法について ～ 2013 東大・京大入試問題を振り返って～

Focus Gold・Focus Up 編集委員　竹内英人

2013年度の大学入試の合格発表も終わり，先生方におかれましては一息つくと同時に早速，入試問題分析をされ，新年度に向けての準備をされている方も多いと思います。入試の結果がすべてではありませんが，入試の結果は，日頃の自身の授業が果たして正しかったのかどうかを振り返る重要な資料となります。そこで，今回は2013年度の東大，京大の問題を振り返りながら,「難関大学へ合格するためには何が必要か」について考えていきたいと思います。一問一問の解説については予備校のHPや受験雑誌で詳しく掲載されていますので，ここでは東大，京大の問題について，教育的な視点も交えて考察をしていきたいと思います。

そこで，まず初めに，ここ数年の東大，京大の数学の問題を見てきて，難関大学が求める数学力として「６つの力」を示した後，それらをもとに具体的な問題の考察をしていきます。

【東大・京大などの難関大学が求める数学力】

①問題文の意味を把握，イメージする力

（条件をもれなく把握し，抽象的な問題については，自分の理解しやすい状況に言い換える力）

→問題を配られたとたんに，すぐに鉛筆を走らせるのではなく，まず最低5分間しっかりと問題文と向き合う習慣をつけていますか？

②地道な計算を面倒がらずに，最後まで解ききる腕力，計算力

（難関大でも最後に差がつくのは標準的な問題で，最後まで計算しきれるかどうかの計算力）

→日頃の授業で,「後は計算すれば答え出るからやっておいて…」で済ませていませんか？（実際，私のアンケートでは，実際に手を動かして計算をやっている生徒は３割弱）

③具体的に手を動かす力

（特に確率や整数，数列の問題では具体的に実験が出来るかどうか。これは0点の答案に成らないためにも重要な作業です）

→教師自身が具体的に手を動かして試行錯誤する過程から見せてますか？（生徒が一番見たいところはここ！ここは参考書では学べません）

④実験して発見した結果を，答案へ反映していくための日本語能力

数式化（定量化）も大事だが，それ以上に，どのようなイメージで伝えていくかという日本語力と文章力が必要。状況が分かっていながらも，それを上手く日本語で表現が出来ないがために手が付けられない生徒が多々います。その結果，数式の羅列となっていることが多く，とくに京大の図形の証明問題や東大の離散数学的（数学オリンピック的）な論証問題（ある程度，考えが日本語で記述しなければならない問題）で大きな差が出ます。

→教師が日本語指導（簡潔な文章ではなくても良いので採点者に意味が伝わる日本語の書き方の指導）をしていますか？

⑤（初等）幾何の力

座標を用いて計算に持ち込む場合や三角関数やベクトルで処理する際に計算が煩雑になる場合がよくあります。そんな時，初等幾何の知識で手際よく解ける問題が多いです。つまり,単に「別解」というレベルではなく，東大，京大は揺るぎない計算力を求める一方で，初等幾何的な柔軟な発想を求めています。

→教師自身が初等幾何から逃げて代数的な解法ばかりに終始していないですか？

⑥単なる「問題が解ける」というレベルから，問題を（数学そのものを）楽しむ力

色々な考え方を通して数学の面白さを伝える（いわゆる，色々な「別解」を考える)，問題を発展・拡張させる,その問題からのメッセージ（出題意図，ねらい）を生徒と一緒に考える等，つまり「10のことを学ぶために，10題の問題を解くのではなく，1題から10のことを学ぶ」，といった1つ1つの問題に対する前向きで貪欲な姿勢

→未だに教師自身が「沢山問題を解けば何とかなる，いかに沢山の解法パターンを覚えさせるかが大事」と考えていませんか？

以上をもとに，以下，東大，京大の入試問題を見ていきましょう。

まずは東大から

【2013東大】（　）内は予想平均点

理系〈1〉（求められる力①）(8/20)

> 実数 a，b に対し平面上の点 $P_n(x_n,\ y_n)$ を
> $(x_0,\ y_0)=(1,\ 0)$
> $(x_{n+1},\ y_{n+1})=(ax_n-by_n,\ bx_n+ay_n)$
> $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$
> によって定める。このとき，次の条件(i)，(ii)がともに成り立つような $(a,\ b)$ をすべて求めよ。
>
> (i)　$P_0=P_6$
>
> (ii)　P_0，P_1，P_2，P_3，P_4，P_5 は相異なる。

今年の問題の中では，一番易しい問題です。文字で表されている1次変換を表す行列に対し，回転＋拡大・縮小を表す行列であることに気づけるかがポイントです。本問と似た設定の問題であればフォーカスゴールド数学Ⅲ＋Cのp.543の東京理科大の問題があります。こちらは具体的な数字で表される行列ですが，形から，回転＋相似拡大・縮小と見抜くという点では本質的に全く同じです。まずはこのような標準的な問題をきちんと押さえることが東大の標準問題攻略の鍵となるでしょう。回転＋拡大・縮小の行列についてはフォーカスゴールド数学Ⅲ＋Cの例題261，262，265，266でも詳しく扱っているので，その辺りまでは良いでしょう。ただ，先生方が思っている以上に，完答出来ている生徒が多いとは思いません。回転＋拡大・縮小の行列だと気づくところまではよいものの，$6\theta=2k\pi$ とした後，k が6 と互いに素かどうかで場合分けする部分をきちんと議論できない生徒が結構いるような気がします。本問は新課程の複素数平面を意識した題材でしょう。少し詳しく述べれば $x^6=1$ の原始 6 乗根の話に関係します。フォーカスゴールド数学Ⅲ新課程版ではこの辺りも詳しく取り扱う予定です。

理系〈2〉（求められる力②）(10/20)

> a を実数とし，$x>0$ で定義された関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める。
> $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$
> $g(x)=\sin x+ax$
> このとき $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが $x>0$ において共有点をちょうど 3 つ持つような a をすべて求めよ。

『文字定数は分離せよ』とある意味，受験数学の定番のテーマです。しかし，そう簡単にはいきません。その後の微分計算が大変で，グラフの概形をかくまでが大変です。途中で投げ出さずに頑張れるかがポイントです。さらに，答えは出たものの答案がどれだけきちんと書けるかで差がつく問題です。特に極値に関する減衰の様子についてどれだけ正確に書いてあるかで，大きく差がついたと思われます。日頃の指導でグラフを用いて考える場合はどの程度の数式，日本語を補うべきかをきちんと指導しているかどうかで生徒の出来が変わってくるでしょう。本問が最後まで解き切れるかどうかが，合否を大きく左右したと思います。

理系〈3〉（求められる力②，③，④）(5/20)

> A，B の 2 人がいる。投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインが 1 枚あり，最初は A がそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

(i) Aがコインを持っているときは，コインを投げ，表が出ればAに1点を与え，コインはAがそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，AはコインをBに渡す。

(ii) Bがコインを持っているときは，コインを投げ，表が出ればBに1点を与え，コインはBがそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，BはコインをAに渡す。

そしてA，Bのいずれかが2点を獲得した時点で，2点を獲得した方の勝利とする。たとえば，コインが表，裏，表，表と出た場合，この時点でAは1点，Bは2点を獲得しているのでBの勝利となる。

(1) A，Bがあわせてちょうどn回コインを投げ終えたときにAの勝利となる確率$p(n)$を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p(n)$を求めよ。

昨年に続き，思考実験から規則性を発見し定量化（数式化）していく確率の問題です。しかし，そう簡単ではありません。その理由は2つあります。まず1つ目は，具体的なn（例えば$n=2, 3, 4, 5, 6, \cdots$）で実験すると，

（ア）n=偶数のとき，Bは一度も勝たない

（イ）n=奇数のとき，Bが一度だけ勝つ

という2つの場合に場合分けできることに気づきますが，（イ）の場合についてはAが先に勝つ場合とBが先に勝つ場合があり，それらの場合をきちんと図や日本語によって示し，数式に表現することが難しい（つまり上記の③と④の力がかなり求められる）という点，2つ目は仮に(1)が出来たとしても，(2)の極限を求める計算が大変なボリュームであるということです。

この極限を求めるためには，

$a>1$，tを自然数とするとき，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^t\cdot a^{-n}=0$ ……（＊）

の知識を知っていないと計算が大変ですが，この知識をどの程度前提として使ってよいか迷うところです。（実際，この手の問題については，（＊）を使っても良いというヒントがつくのが普通です。）本問では解答のボリュームから考えても，この事実を直接使ってもほとんど減点は無いと思います。この極限計算をもう少し丁寧にやるなら次の方法を使うのが良いでしょう。こちらに関しては高校数学の範囲では厳密性にやや欠けるところがありますが，途中経過が書いてある分，より丁寧な答案となっています（もちろん答案としては減点されることは無いでしょう）。

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k=\frac{1-x^n}{1-x}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^n}{1-x}$$

この式の両辺を微分して，

$$\sum_{k=0}^{n-1} kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{nx^{n-1}-(n-1)x^n}{(1-x)^2}$$

さらに微分して

$$\sum_{k=0}^{n-1} k(k-1)x^{k-2}$$
$$=\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{n(n-1)x^{n-2}-2n(n-2)x^{n-1}+(n-1)(n-2)x^n}{(1-x)^3}$$

となり，$0<x<1$のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nx^n=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2x^n=0$より，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2},$$
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} k(k-1)x^{k-2}=\frac{2}{(1-x)^3}$$

いずれにしても超重量級の問題です。(1)で部分点を稼いでさっさと他の問題にいきたいところです。本問よりは大分易しいですが，2004年の第6問，2006年の第2問などでしっかりと手を動かす練習ができていれば，ある程度の部分点はいけたでしょう。フォーカスゴールド数学Ⅰ＋Aでは，このような実験をして規則を把握し，一般化していくという確率の問題を数多く取り上げています。（チャレンジ編⑲～㉔）

理系〈4〉（求められる力①，⑤，⑥）（8/20）

△ABCにおいて，∠BAC=90°，$|\overrightarrow{AB}|=1$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3}$とする，△ABCの内部の点Pが

$$\frac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|}+\frac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|}+\frac{\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PC}|}=\vec{0}$$

を満たすとする。

(1) ∠APB，∠APCを求めよ。

(2) $|\overrightarrow{PA}|$，$|\overrightarrow{PB}|$，$|\overrightarrow{PC}|$を求めよ。

一見，目新しい問題に見えるかも知れませんが，過去に東北大学で以下の類題が出題されています。

次の問いに答えなさい。

(1) $\vec{0}$でない平面ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$が
$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}+\dfrac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=\vec{0}$を満たすとき，この3つのベクトルの互いになす角をそれぞれ求めなさい。

(2) $\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{x}$を任意の平面ベクトルとするとき，$|\vec{a}-\vec{x}|\geqq|\vec{a}|-\vec{x}\cdot\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$が常に成り立つことを証明しなさい。

(3) すべての内角が120°未満の三角形ABCの内部の点Xから，各頂点までの距離の和，つまり，$|\overrightarrow{XA}|+|\overrightarrow{XB}|+|\overrightarrow{XC}|$が最小となるような点Xの位置を定めなさい。

しかし，仮にこの類題を知らなくても，普段，きちんと勉強していれば確実に得点できる問題だと思います。

$\dfrac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|}$，$\dfrac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|}$，$\dfrac{\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PC}|}$ が単位ベクトルであることに気づけば，(1)はよくある問題

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$で$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$の値を求めよ。

と本質的にはまったく同じ問題です。もっと基本的な問題に帰着させるならば，フォーカスゴールド数学Ⅱ＋Bのp.589の例題336と本質的には同じです。この問題なら誰もが一度は経験しているのではないでしょうか。要はこうした典型的な問題と(1)が本質的に同じ問題だと見抜く力が重要です。

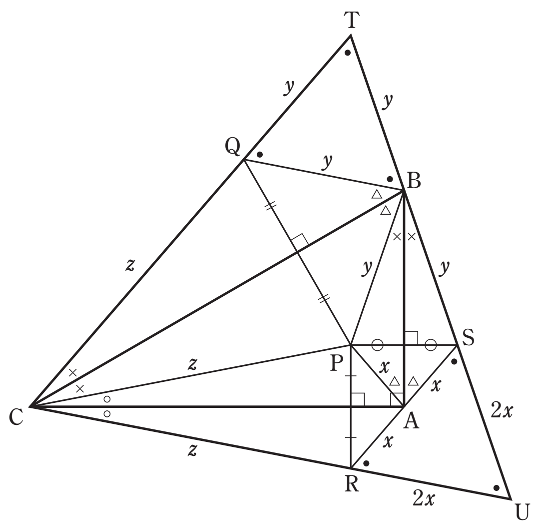
普段，何となく解いているだけでは，なかなかそういう力は身につきません。典型的な問題からどれだけ多くのことが学べるかが難問を解く力を身につける第一歩です。

問題は(2)ですが，座標設定して計算で地道に求めていく方法もありますが（いわゆる②の力），この問題で座標を設定して解いた生徒は少ないと予想します。一般的には，3つの三角形△PAB，△PBC，△PCAにおいて余弦定理の式を立て，連立方程式を解くことになりますが，この連立方程式を解くのが意外と難しかったかもしれません。$PA=x$，$PB=y$，$PC=z$としたとき，3式がx，y，zに関して対称であることに気づけば，和や差をとったり，各式の両辺に$x-y$，$y-z$，$z-x$を掛けて，$x^3-y^3=x-y$，$y^3-z^3=4(y-z)$，$z^3-x^3=3(z-x)$として辺々足すと$-2x+3y-z=0$と簡単な1次式が出てくるので，これを使うと少しは計算が楽になります。さらに，△PABと△PBCが相似な三角形であることに気づけば(①の力)，相似比と余弦定理を組み合わせて簡単に計算できます。なお，この問題は「フェルマー点」が出題背景となっています。

「フェルマー点」については，フォーカスゴールド数学Ⅲ＋C改訂版の実践編p.805トレミーの定理の応用として掲載しています。ここではこのアイディアを利用した別解を示してみましょう。Pの対称点を取るというアイディアが「フェルマー点」の証明とよく似たアイディアです。

(2)のフェルマー点を意識した別解

下の図のように，PのBC，CA，ABに関する対称点をQ，R，Sとし，CQとBSの交点をT，CRとBSの交点をUとする。



図のような正三角形TCUができる。
(図を1つずつ丁寧にかいていけば作図できる。)

ここで，$\begin{cases} PA=x \\ PB=y \\ PC=z \end{cases}$ として，対称性と△BQTと△RSUが正三角形であることを用いると，

$TC=y+z$，$CU=z+2x$，$TU=2x+2y$

△TCUは正三角形より，$y+z=z+2x=2x+2y$

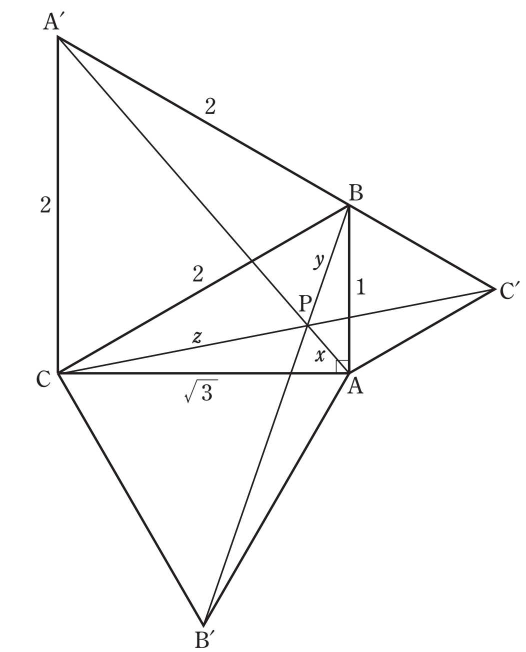
ここから，$\begin{cases} y=2x \\ z=2y=4x \end{cases}$ が出る。

この2式と△PABで余弦定理の式

$$x^2+y^2-2xy\cos 120^\circ=1^2$$

を用いれば，x，y，zを求めることができます。

もう少し「フェルマー点」について触れておきます。今，△ABCの各辺上に，それぞれの辺を一辺とする正三角形△A′BC，△B′CA，△C′ABを作ったとき，3直線AA′，BB′，CC′は1点で交わります。(このことは「チェバの定理の逆」を用いて示すことができます。) 実は，この点が「フェルマー点」となっています。(下図参照) この事実については，フォーカスゴールド数学Ⅲ+Cのp.805をご参考ください。



すると，この事実を用いると，$x(=PA)$，$y(=PB)$，$z(=PC)$について次のような関係式が成り立つこともわかります。

今，Pは「フェルマー点」より，

$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120^\circ$

四角形PBA′Cにおいて，$\angle BA'C=60^\circ$より，

$\angle BA'C+\angle BPC=180^\circ$

したがって，四角形PBA′Cは円に内接する。

よって，トレミーの定理より，

$A'B\cdot PC+A'C\cdot PB=A'P\cdot BC$

ゆえに，$2\cdot PC+2\cdot PB=2A'P$

$PC+PB=A'P$

よって，$PA+PB+PC=PA+A'P=AA'$ ……①

△ACA′は直角三角形より，

$AA'=\sqrt{A'C^2+AC^2}=\sqrt{4+3}=\sqrt{7}$ ……②

ここで，①，②より，$PA+PB+PC=\sqrt{7}$であるから，$x+y+z=\sqrt{7}$ ……③

この式を用いると，多少計算が楽になるでしょう。

たとえば，$\angle ABP=\theta_1$とおくと，

$\angle BAP=60^\circ-\theta_1$

よって，△PABで正弦定理を用いると，

$$\frac{x}{\sin\theta_1}=\frac{y}{\sin(60^\circ-\theta_1)}=\frac{1}{\sin 120^\circ}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{2}x=\sin\theta_1 & \cdots④ \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}y=\sin(60^\circ-\theta_1)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta_1-\dfrac{1}{2}\sin\theta_1 & \cdots⑤ \end{cases}$$

④，⑤より，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta_1-\dfrac{\sqrt{3}}{4}x$

$\cos\theta_1=y+\dfrac{1}{2}x$ …⑥

また，$\angle PAC=90^\circ-\angle BAP$

$=90^\circ-(60^\circ-\theta_1)=\theta_1+30^\circ$

よって，△PACで正弦定理を用いると，

$$\frac{z}{\sin(\theta_1+30^\circ)}=\frac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}$$

$$z=2\sin(\theta_1+30^\circ)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta_1+\frac{1}{2}\cos\theta_1\right)$$

$$=\sqrt{3}\sin\theta_1+\cos\theta_1$$

これに④，⑥を代入して，

$z=\dfrac{3}{2}x+y+\dfrac{x}{2}$ より，$z=2x+y$ …⑧

③，⑧より，$x=2z-\sqrt{7}$，$y=2\sqrt{7}-3z$

となるので，あとはこの2式を先に述べた余弦定理の式 $x^2+y^2+xy=1$ と組み合わせれば求めることができます。

また，別の視点として。面積に注目して，

$\triangle ABC=\triangle PAB+\triangle PBC+\triangle PCA$

より，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}(xy+yz+zx)\sin 120^\circ$

よって，$xy+yz+zx=2$も成り立ちます。

このように，「フェルマー点」の図はいろいろな別解が考えられる面白い一題だと思います。

新課程で「複素数平面」が登場することによって，様々な図形の証明が出来るようになります。新課程フォーカスゴールド数学Ⅲでは，「ナポレオンの定理」や「九点円の定理」など，数学Aではなかなか扱われないような幾何の定理まで丁寧に掲載してあります。今後，東大，京大をはじめとする難関大学において，こうした幾何の定理を背景とした出題は増えると考えられます。

理系〈5〉(求められる力①，②，④) (6/20)

> 次の命題Pを証明したい。
>
> 命題P　次の条件(a)，(b)をともに満たす自然数(1以上の整数) Aが存在する。
>
> (a)　Aは連続する3つの自然数の積である。
>
> (b)　Aを10進法で表したとき，1が連続して99回以上現れるところがある。
>
> 以下の問いに答えよ。
>
> (1)　yを自然数とする。このとき不等式
>
> $$x^3+3yx^2<(x+y-1)(x+y)(x+y+1)<x^3+(3y+1)x^2$$
>
> が成り立つような正の実数xの範囲を求めよ。
>
> (2)　命題Pを証明せよ

数学オリンピック的な要素を含む問題です。(1)については何となく式をいじっているとxの範囲は出てくるのですが，論理的にきちんとした答案を書くのは意外と難しいと思います。(2)では当然，(1)をヒントにすることは予想がつきますが，どのように(1)を用いるかが非常に見えにくい問題です。試験本番中に111……1111 (1が99個) を3の倍数と見て，(1)の形と比べて，111……1111=$3y$と置くという発想はなかなか思いつくものではないでしょう。(2)については理Ⅲでも解くのは厳しいと思われるので，戦略としては(1)で出来るだけ部分点を稼いでさっさと他の問題へ進むのが良いでしょう。ちなみに，本問の背景には「レピュニット数」(111……1111のようにすべての数が1である数) があるように思われますが，筆者には詳しいことは不明です。どなたかご教示いただけるとありがたいと思います。

理系〈6〉(求められる力①，②，④) (4/20)

> 座標空間において，xy平面内で不等式 $|x|\leqq 1$，$|y|\leqq 1$により定まる正方形のSの4つの頂点をA(−1，1，0)，B(1，1，0)，C(1，−1，0)，D(−1，−1，0)とする。正方形Sを，直線BDを軸として，回転させてできる立体をV_1，直線ACを軸として回転させてできる立体をV_2とする。
>
> (1)　$0\leqq t<1$を満たす実数tに対し，平面$x=t$によるV_1の切り口の面積を求めよ。
>
> (2)　V_1とV_2の共通部分の体積を求めよ。

「形のイメージしにくい立体の図形を切り口を求めて定積分に持ち込む」という問題です。立体自体はそれほど複雑な形ではありませんが，円錐の方程式を表現する段階で手が止まった生徒が多かったのではないでしょうか。回転軸に垂直に切り，1つずつ座標を求め，円錐上の任意の点をP(x，y，z)として，Pが満たす図形的な性質を示す(軌跡の考え方)ことでも出来ますが，少々面倒です。円錐の方程式の内積表示を知っていれば多少は簡単に導くことが出来ますが，この場合も同値性に気をつけて丁寧に式変形していく必要があります。どちらにしても大変です。

また，平面$x=t$による切り口の意味を理解し，どのように数式で表現するかも手こずった生徒さんが多いのではないでしょうか。さらには，仮に切り口が図示出来たとしてもその後に，面倒な積分計算が待っています。東大必須の「対称性」を

上手く用いて少しでも計算量を減らしたいところです。本問は，形状が複雑な立体図形の体積，対称性，膨大な計算量とまさしく東大数学の特徴を凝縮したような問題です。（ほとんどの生徒は手がつかなかったと予想します。）決して簡単な問題ではありませんが，2003，2005，2008，2012年等の過去問を経験していれば，解法の道筋は分かるはずです。ちなみにフォーカスゴールド数学Ⅱ＋Bではp.840に内積による円錐の方程式も示してありますし，フォーカスゴールド数学Ⅲ＋C改訂版ではp.420～p.423，p.688～p.690においてこのような斜めの軸で回転するいわゆる「斜回転」の体積に対しても色々な考え方を示してあるので，こうした典型的な問題をしっかり理解することが，こうした難問で部分点を確実に取るために必要な力と言えるでしょう。

以上，東大理系の６問を見てきましたが，今年の６問のセットは大変厳しいセットとなりました。各予備校の分析によれば〈1〉,〈2〉,〈4〉など（やや易）とありますが，それほど易しくないと思います。先生方の学校の生徒さんの中には一問も完答できなくて合格したという生徒もいたのではないでしょうか。理Ⅰ，理Ⅱでは2問＋α（合わせ技で）出来れば十分，理Ⅲでも，3問＋αが勝負の分かれ目だと予想しています。

（6問合計予想平均点 41/120）

ありきたりのアドバイスになりますが，やはり学習してきた範囲の中で解ける問題をどれだけ確実に解けるかが東大数学攻略の鍵だと言えるでしょう。それに加え，今後，指導者は数学オリンピックの問題（日本の予選レベル）を見ておくと良いかも知れません。なお，先にも述べましたが，確率と微積分の体積の問題については東大は過去問と似た問題が繰り返し出されているので，この２分野については十分な過去問練習をしておくと良いでしょう。（最低でも10年分はやっておきたいところです）

続いて，東大文系について気になった問題〈2〉について触れます。

> 座標平面上の３点
> $\mathrm{P}(0,\ -\sqrt{2}),\ \mathrm{Q}(0,\ \sqrt{2}),$
> $\mathrm{A}(a,\sqrt{a^2+1})\quad(0\leqq a\leqq 1)$
> を考える。
>
> (1) ２つの線分の長さの差 PA－AQ は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ。
>
> (2) Q を端点とし A を通る半直線と放物線 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{8}x^2$ との交点を B とする。点 B から直線 $y=2$ へ下ろした垂線と直線 $y=2$ との交点を C とする。このとき，線分の長さの和
> PA＋AB＋BC
> は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ。

⑵は計算でごりごりと解いてもよいですが，放物線の定義（定点と定直線からの距離が等しい点の集合）という，数学Cの知識があれば，簡単に求めることが出来ます。昨年の文系の2番の最大値を求める問題では最後の式が分数式になり，相加相乗平均の不等式を上手く使うことによって求めることが出来るのですが，ここでも分数関数の微分を知っていれば解くことが出来ます。このように東大文系の問題は理系の知識があれば比較的簡単に処理できることも多いので，文系においても数学Ⅲ，C（新課程では数学Ⅲ）の基本的な部分は学んでおいても損はないでしょう。特に，複素数平面における回転の知識はぜひ教えることをお薦めします。

本年度の文系では〈3〉,〈4〉はほとんどの生徒は手がつかず差がつかないと思われるので，〈1〉,〈2〉でどれだけ丁寧な答案が書けるかで合否が決まるでしょう。〈2〉については東大数学に必要となる丁寧に場合分けを練習させる上では良問だと思います。理系でもぜひ復習しておきたい問題です。

続いて京大です。

【2013京大】

理系〈1〉（求められる力 特になし）（25/30）

> 平行四辺形 ABCD において，辺 AB を $1:1$ に内分する点を E，辺 BC を $2:1$ に内分する点を F，辺 CD を $3:1$ に内分する点を G とする。線分 CE と線分 FG の交点を P とし，線分 AP を延長した直線と辺 BC の交点を Q とするとき，比 AP：PQ を求めよ。

ベクトルの典型問題。定期考査レベル。これを落とすようでは合格はおぼつきません。ちなみに本問はベクトルを使わなくても初等幾何の知識でも解けます。1年生にとって，数学Aのよいトレーニングになるでしょう。

理系〈2〉（求められる力③，④）（8/35）…

> N を２以上の自然数とし，$a_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を次の性質(i)，(ii)を満たす数列とする。
>
> (i) $a_1=2^N-3,$
>
> (ii) $n=1,\ 2,\ \cdots$に対して，
> a_n が偶数のとき $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2},$
> a_n が奇数のとき $a_{n+1}=\dfrac{a_n-1}{2}$
>
> このときどのような自然数 M に対しても
> $$\sum_{n=1}^{M}a_n\leqq 2^{N+1}-N-5$$
> が成り立つことを示せ。

具体的に実験すれば，$3\leqq n\leqq N$ で a_n は奇数となることがわかります。しかし，これを数学的帰納法で厳密に示そうとすると意外と示しづらい問題です。普通の大学であれば，実験の結果を並べて帰納的に（数学的帰納法ではない）とやっても，大丈夫でしょうが，そこは「論証の京大」である以上，数学的帰納法できちんと示す必要があるでしょう。厳密な解答が書けるかどうかで差がつく一問になったと思われます。ここさえ示せれば，あとは$n\geqq N+1$ で $a_n=0$ であることを用いれば，任意の自然数 M で，$\displaystyle\sum_{n=1}^{M}a_n\leqq\sum_{n=1}^{N}a_n=2^{N+1}-N-5$ は容易に示すことができます。

理系〈3〉（求められる力①，④）（5/35）

> n を自然数とし，整式 x^n を整式 x^2-2x-1 で割った余りを $ax+b$ とする。このとき a と b は整数であり，さらにそれらをともに割り切る素数は存在しないことを示せ。

初見の生徒にとっては，難しかったかも知れませんが，かつての東大の問題と全く同じ内容です。（ただし，東大では⑴，⑵と誘導がついていました。ちなみにこの東大の問題についてはフォーカスゴールド数学Ⅱ＋Bの［例題316］で扱っています。）a，b について，東大と同じように a_n，b_n と添え字がついた表現になっていれば比較的簡単に a_n，b_n の連立漸化式と気づいたかもしれません。いずれにしても，一度，経験したかどうかで差がつく問題でした。

理系〈4〉（求められる力①）（25/35）

> $-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における $\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$ の最大値を求めよ。ただし $\pi>3.1$ および $\sqrt{3}>1.7$ が成り立つことは証明なしに用いてよい。

標準的な問題ですが，満点を取ることが意外と難しい問題かもしれません。$f'(x)$ の解を具体的に求めることができないので，$f''(x)$ を用いて，$y=f'(x)$ のグラフをかくことによって，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に，$f'(x)=0$ の解がただ１つあることをきちんと示せるかどうかが答案作成の鍵となります。本問のように$f'(x)=0$ の解を具体的に求めることができず，$f''(x)$ の符号を調べるパターンの問題はフォーカスゴールド数学Ⅲ＋C改訂版でも数多く取り上げています。(例題125，チャレンジ問題⑪，⑫）このような問題を一度経験していれば，十分に完答できる問題でしょう。

一方で，〈2〉と同様に，こうした標準的な問題

に対しどれだけ論理に穴のない答案が書けるかどうか問われる日頃の指導が大きく反映する問題であったと思います。一説では，京大ではこうした標準的な問題への採点は特に厳しく，いくら答えが合っていても，論理的にいい加減な場合は限りなく0点に近いと言われています。日頃から「簡単な問題ほど丁寧に書く」習慣を心がける指導をしておくのが良いでしょう。これは東大でも同じことです。

理系〈5〉（求められる力①，②，⑤）（15/30）

> xy 平面内で，y 軸上の点 P を中心とする円 C が 2 つの曲線
> $C_1 : y=\sqrt{3}\log(1+x)$,
> $C_2 : y=\sqrt{3}\log(1-x)$
> とそれぞれ点 A，点 B で接しているとする。さらに△PAB は A と B が y 軸に関して対称な位置にある正三角形であるとする。このとき 3 つの曲線 C，C_1，C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

標準的な問題です。問題文から，C_1，C_2 が y 軸について対称であることと，接点における法線が円の中心を通るなど，図の状況が分かれば解法の見通しはすぐに立ちますが，意外と生徒はこうした問題で初等幾何の知識を使うことが出来ません。生徒を見ているとグラフが出てきた途端，接線や法線を数式（微分）の知識だけで解こうとする生徒が多いようです。このような問題はセンター試験でも多いので，日頃から座標平面上の図形においても，初等幾何の性質を使って手際よく考える意識が欲しいところです。

最後の面積を求める計算においても同じことが言えます。全体の図をよく見れば，対称性を考慮して，台形から扇形の面積などを引くことによって簡単に求めることが出来るのですが，ひたすら積分計算で求めた生徒も多かったのではないかと推測します。そうした意味で，本問も標準的な問題でありながらそれほど平均点はそれほど高くないと予想しました。

本問は厳密な議論をすれば，円の中心の y 座標が負の場合についても考える必要があります。ほとんどの生徒は円の中心の y 座標（>0）の図で考えたと思われ，京大がそのあたりを減点したかどうかは興味のあるところです。(私の予想では，多少触れていれば減点なし，全く触れていない場合は，－1か－2点ぐらいではと予想します。生徒のでき次第で部分点の付け方が変わってきます。)

理系〈6〉（求められる力①，③，④）（20/35）

> 投げたとき表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨を用意する。数直線上に石を置き，この硬貨を投げて表が出れば数直線上で原点に関して対称な点に石を移動し，裏が出れば数直線上で座標 1 の点に関して対称な点に石を移動する。
>
> (1) 石が座標 x の点にあるとする。2 回硬貨を投げたとき，石が座標 x の点にある確率を求めよ。
> (2) 石が原点にあるとする。n を自然数とし，$2n$ 回硬貨を投げたとき，石が座標 $2n-2$ の点にある確率を求めよ。

〈1〉の次に簡単な問題です。(1)は具体的に書き出せばすぐ答えが分かります。続いて(2)ですが，京大には珍しく小問(1)があるので，当然，(1)が(2)のヒントになっていることに気づかなくてはなりません。また，(ア)表裏，(イ)裏表，(ウ)表表（または裏裏）の回数をそれぞれ x，y，z 回とおくと，$2n-2$ の点から，直感的にすぐ，(ア)が $n-1$ 回，(ウ)が 1 回と気付きますが，「論証の京大」より，式で示しておいたほうが無難でしょう。すると $x+y+z=n$，$2x+(-2)\cdot y+0\cdot z=2n-2$ の連立方程式が立ちますが，式が一つ足りないところから，x，y，zが 0 以上の整数であるという条件を用いて，x，y，z の値を絞り込むといったいわゆる整数問題に帰着する段階で整数問題に慣れていない生徒にとっては手が止まったかもしれません。ということで予想平均点は20点としました。

本問は確率と整数問題の融合問題であり，昨年（2012）の理系 6 番も連分数の理論が背景となっている確率の問題でした。（ただし，本問とは比べものにならないほど難問）このように，東大，京大のような難関大学においては他分野との融合問題についても日頃からトレーニングを積んでおく必要があるでしょう。特に本問のように新課程から始まった「整数分野」については色んな問題との融合が見られ，難問になる場合が多いようです。例えば，2011の東大理系２番は一見数列の問題ではあるが，ユークリッドの互除法が問題の背景となっています。残り一年旧課程の入試が続くことを考えると，旧課程の生徒にも整数の理論については再度指導しておく必要があるでしょう。フォーカスゴールド数学Ⅰ＋Aは「整数」の章も非常に充実しています。特に東大・京大受験生を考慮した問題やコラムも満載なのでぜひ一度目を通していただければと思います。

以上，京大理系の問題を見てきました。（京大文系については，理系との共通問題や類題が多いので省略します。）本年度の京大の問題は全体的に易しかったような気がしますが，それ以上に感じたことは，標準的な問題が多いにも関わらず差がつきやすい問題が多いということです。京大は標準的な問題に対してどれだけ論理に穴がない厳密な答案が書けるかどうかを試しているような気がします。そう考えると，これこそ日頃の学習の成果がきちんと反映される良問と言えるのではないでしょうか。つまり，京大数学においては「努力は裏切らない」ということでしょうか。一方，東大数学は，「努力が報われない場合もある」という問題が多々あり，本年度のセットも完答出来る問題はほとんどなく，これで良いのだろうかと少し疑問を感じます。東大，京大は日本を代表する大学である以上，単に問題が難しいというだけではもの足りません。誰でも手がつくが，いざ答案を作成する段階でなかなか上手く表現できない問題や，答えは予想できるがそれを筋道立ててきちんと説明するのが大変であるといった，教育的な配慮が成された問題の出題を心がけて欲しいと思っています。今回の東大の〈5〉の(2)や〈6〉のような問題としては面白いが，ほとんどの生徒が0点に近いという問題を出し続ければ，学校や予備校，塾の指導はどうしても，「分かる問題で部分点を取って合格すれば良い」という指導になるでしょう。

私の理想としては受験の典型的な問題ではないが，誰もがある程度手をつけることができ，その上でどれだけ論理的な答案が書けたかどうかで，点数の差がつくような問題について3題程度じっくり時間をかけて解くというのが一番だと思います。

少し話がそれてしまいましたが，やはり，東大，京大を目指す生徒は「部分点を狙う生徒」ではなく，「完答する生徒」であって欲しいと思います。京大の問題を見ているとそんな生徒を求めているような気がしてなりません。

以上，東大，京大の問題を振り返りながら，日頃の学習についても触れてみました。他大学においても興味深い問題は幾つかあったので，それは次回のFocus Gold通信に回したいと思います。

最後に，こうした東大，京大の数学にひるまずに乗り越えていける生徒を育成するために，日頃，指導者は何を伝えていかなくてはならないか，私の考えを述べたいと思います。

①まずは，自力で考える→答えをすぐ見ない

答えをすぐに見る人は，その場では解き方が分かっても本当の理解には達することはない。時間が経てばすぐに忘れるし，少しひねれば途端に出来なくなる
最低でも15分は手を動かし，試行錯誤してみよう。
→条件は何か，求めることは何か，使うべき公式は何か，類題はどんなものがあったか
　予想，実験，図を書く，簡単な場合で考える
できることは何でもやる！

②解けなかった後が大事

入試問題等の難問は最初は自力で解けないことの方が多い。自力で解けるに越したことはないが肝心なのは自力で解けなかったときに，どのようなフォローをするかである。
→多くの人は，解説・解答を読んで写して納得するだけ

→「なぜ解けなかったのか」,「どうすれば解けるのか」を振り返ることが実力向上のポイント

【振り返りのポイント】
- 問題文で読み切れていなかった条件は何か？
- 理解できていなかったポイントは何か？
- 忘れていた公式，定理，基本パターンは何か？
- どこまでだったら出来たか，どこからが出来なかったのか？

【参考書などの類題との比較検討】
- 典型問題の解法のストックは十分であるか？
- 例題と同じ解法で解けるはずなのになぜ解けなかったのか？
- 例題とどの部分が同じで，どの部分が異なるのか？（条件や示すべき内容）
- どの問題とどの問題をミックスした問題なのか？
- 見かけは違うが，実は例題と全く同じ考え方であるということはないか？
- 参考書にある別解の考え方を軽視していたのではないか？
- 単に解答を暗記していただけで，解答以外の考え方や，注意などを読んでいなかったのではないか？

③数学の成績を上げる最短の勉強法（急がば回れ！量より質の勉強法へ切り替えよ！）
- 基本事項を完璧にする。公式・定理は５秒で書けないと覚えているとは言わないし，使い物にならない。もちろん難関大学志望の人はすべての定理，公式を導けること。（過去の東大，2013の阪大理系，文系）そして，その定理公式が導き出された背景まで分かると色んな応用が利く）
- 典型問題の解法パターンのマスター（暗記）：参考書の例題，重要例題に関しては，ページ数，レイアウト，どこに何が書いてあったか言えるくらい完璧に繰り返し覚える（東大，京大の合格者は自分の一番のお気に入りを平均５，６周繰り返している）
- 「なぜ？」を大事にする。（なぜ，このような解法が思いつくのか，なぜ，こうした式変形が自然な発想なのか）
- 一つの解法に満足しない，常日頃から別解を考える癖をつける→難問攻略の鍵！
- 自分の言葉で説明する力をつける→人に説明できてこそ本当の理解

フォーカスゴールドは，上の①～③を実現するために，標準問題から東大・京大レベルまでの問題を丁寧に取り上げています。今年の東大，京大の問題を見てもフォーカスゴールドの内容を完璧にマスターすることで十分に合格できると確信しています。沢山の問題集に取り組むのも一つの手かも知れませんが，良い本をじっくり腰を据えて繰り返す。そうした学習こそが真の実力につながるのではないでしょうか。

「数学攻略シート」の奨め
以上の実践を行うための実践例として，フォーカスゴールド数学Ⅱ＋Bのコーヒーブレイクでは「数学攻略シート」というものを掲載しています。現在，「数学攻略シートの会」を作って，全国の先生方とどのようにしたら日本の子供たちの数学力を上げることができるかという活動を行っています。先生方の学校でも一度，実践されてみてはいかがでしょうか。効果については私の折り紙付きです。

本稿に関してご意見がある場合は気軽に連絡下さい。

名城大学 竹内英人 takeuchi@meijo-u.ac.jp

複素数平面の有用性を考える（その1）

Focus Gold・Focus Up 編集委員
豊田 敏盟
Toshiaki Toyoda

複素数平面の復活

旧課程の科目「数学B」で扱われていた複素数平面は，前教育課程（2003年実施）で姿を消したものの，2013年から実施の現行教育課程の科目「数学Ⅲ」に改めて位置づけられました。当時の「数学B」で扱われていた複素数平面と，その内容はほぼ同じであることから，10年ぶりの復活と言えます。

高校で複素数平面を学ばなかった数学担当の先生の中に，複素数平面の考え方や入試に備えた問題が掲載された参考書の出版を待ち望んでいる方も少なくないと伺っています。

複素数の図表示と複素数平面の有用性

複素数 $z=a+bi$（a，b は実数）に対して座標平面上の点（a，b）を考えると，この平面上の点と複素数とは1対1に対応します。このように定義された複素数平面では，複素数の和，差及び実数倍の図表示は，ベクトルの和，差及び実数倍と関連付けて扱うことができます。また，2つの複素数の極形式の積，商は，原点からの距離の拡大・縮小や原点のまわりの回転につながり，幾何学への応用が期待できます。さらに，ド・モアブルの定理の利用により，二項方程式 $z^n=w$ の解を複素数平面上に図示することができます。つまり，複素数平面は複素数の演算を視覚化できて幾何学的な解析に有効です。このことが複素数平面を学ぶ意義の1つに挙げられます。

本稿では，啓林館教科書「詳説数学Ⅲ」第2章の第1節「複素数平面」に該当する範囲の基本問題を3問選んでその解法を掲載し，複素数平面の有用性について考えてみたいと思います。ベテランの先生には至極当然のことかもしれませんが，高校数学で複素数平面を学ばなかった先生にとって，面白いと感じていただければ幸いです。

問題1　z が虚数で $z+\dfrac{1}{z}$ が実数のとき，絶対値 $|z|$ の値を求めよ。

【一般的な考え方】

(1)　$z+\dfrac{1}{z}$ が実数より $z+\dfrac{1}{z}=\overline{z+\dfrac{1}{z}}$，かつ，$z$ が虚数より $z\neq\overline{z}$

複素数や共役複素数の性質から，この考え方での解法が1番目に挙げられます。

(2)　$z=a+bi$（a，b は実数）とおくと，

$z+\dfrac{1}{z}=a+bi+\dfrac{1}{a+bi}$ が実数より，

この虚部$=b\left(1-\dfrac{1}{a^2+b^2}\right)=0$，また，$z$ が虚数より $b\neq 0$

よって，$a^2+b^2=1$ である。したがって，

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=1$

これは，数学Ⅱと関連づけた解法で，複素数平面の導入段階では有効かもしれません。

【2次方程式の解の公式を利用した解法】

$z+\dfrac{1}{z}=k$（実数）とおき，分母を払って z の2次方程式を導くと，

$z^2-kz+1=0$

よって，解の公式から，

$z=\dfrac{1}{2}(k\pm\sqrt{k^2-4}\,)$

k は実数で，解は虚数であるから，

$$z=\frac{1}{2}(k\pm\sqrt{4-k^2}\,i)=\frac{k}{2}\pm\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}i$$

よって，

$$|z|=\sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{k^2+4-k^2}{4}}=1$$

“解は虚数であるから，$z=\dfrac{1}{2}(k\pm\sqrt{4-k^2}\,i)$”の式変形を思いつかない生徒が少なくないことから，この解法を一度は扱ってほしいと思います。

また，この解法は，“正数 n に対して，z が虚数で $z+\dfrac{n^2}{z}$ が実数のとき，$|z|=n$ である”ことが容易に理解できます。

【極形式の利用による解法】

z の絶対値を $r(>0)$，偏角を θ とすると，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ となる。

（ただし，z は虚数より，$\theta\neq n\pi$（n は整数））

よって，$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}=\dfrac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$

$$z+\frac{1}{z}=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$$
$$=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta+\left(r-\frac{1}{r}\right)i\sin\theta$$

これが実数で，$\theta\neq n\pi$ より，$r-\dfrac{1}{r}=0$

よって，$r>0$ より，$r=1$

【図形的な考えによる解法】

原点O，点A(z)，点B$\left(\dfrac{1}{z}\right)$，点C$\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$を考えると，

$z+\dfrac{1}{z}$ は実数より，点Cは実軸上にある。

また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より，四角形OACBは平行四辺形で，

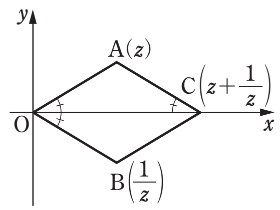
$\arg\dfrac{1}{z}=-\arg z$ より，$\angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{BOC}$

よって，$\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{ACO}$ から $\mathrm{OA}=\mathrm{AC}=\mathrm{OB}$

つまり，$|z|=\left|\dfrac{1}{z}\right|$

よって，$|z|=\dfrac{1}{|z|}$ から $|z|^2=1$

$|z|>0$ より，$|z|=1$



私が教壇に立っていた頃，グループ学習を取り入れた授業を行っていました。これらの解答は，その際に出された生徒の考えに基づくものです。その生徒も今や50歳代半ば，教育界で活躍している人も少なくありません。

問題2　複素数 α，β，γ について，$\alpha+\beta+\gamma=0$，$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ のとき，$|\alpha-\beta|^2+|\beta-\gamma|^2+|\gamma-\alpha|^2=9$ であることを証明せよ。

【式変形による解法】

$\alpha+\beta+\gamma=0$ より，$\gamma=-(\alpha+\beta)$

これを代入して γ を消去すると，

$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ は，

$|\alpha|=|\beta|=|\alpha+\beta|=1$ となる。

各辺を平方して，$|\alpha|^2=|\beta|^2=|\alpha+\beta|^2=1$

よって，$\alpha\overline{\alpha}=\beta\overline{\beta}=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})=1$

この式から，

$\alpha\overline{\alpha}=\beta\overline{\beta}=1$，$\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=-1$　……①

が導かれる。

次に，$|\alpha-\beta|^2+|\beta-\gamma|^2+|\gamma-\alpha|^2$

$$=|\alpha-\beta|^2+|2\beta+\alpha|^2+|2\alpha+\beta|^2$$
$$=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})+(2\beta+\alpha)(2\overline{\beta}+\overline{\alpha})+(2\alpha+\beta)(2\overline{\alpha}+\overline{\beta})$$
$$=6(\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta})+3(\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta)$$

この式に①を代入すると，

$|\alpha-\beta|^2+|\beta-\gamma|^2+|\gamma-\alpha|^2=9$ が成り立つ。

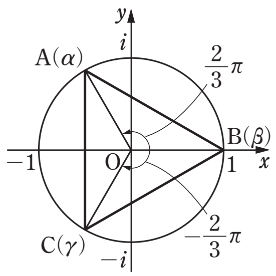
ところで，この式変形による証明は無味乾燥な感じがします。

そこで，「$\alpha+\beta+\gamma=0$，$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$

なら，「$|\alpha-\beta|^2+|\beta-\gamma|^2+|\gamma-\alpha|^2=9$」の図形的な意味を踏まえ，併せて，複素数平面の有用性を利用すると，次の解法が考えられます。

【正三角形の性質と複素数平面の有用性を利用した解法】

3 点 A(α)，B(β)，C(γ) とすると，三角形 ABC の重心は $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ で



条件 $\alpha+\beta+\gamma=0$ から，重心は原点 O にある。

また，$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ から，三角形 ABC は単位円に内接しており，三角形 ABC の外心は原点 O である。

つまり，三角形 ABC の重心と外心が一致しているから，三角形 ABC は正三角形である。

これらから，OA=OB=OC=1，

$$\angle BOA=\angle BOC=\frac{2}{3}\pi$$

よって，複素数平面上において，$\beta=1$ である位置に点 B(β) を定めると，

点 A(α) は，点 B(β) を原点のまわりに $\dfrac{2}{3}\pi$ 回転した点，

点 C(γ) は，点 B(β) を原点のまわりに $-\dfrac{2}{3}\pi$ 回転した点である。

したがって，$\alpha=1\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\gamma=1\left\{\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

また，AC$=|\gamma-\alpha|$ で，$\gamma-\alpha=-\sqrt{3}\,i$ より，AC$=|-\sqrt{3}\,i|=\sqrt{3}$

よって，正三角形 ABC の各辺の長さは，

AB=BC=AC$=\sqrt{3}$

以上から，$|\alpha-\beta|^2+|\beta-\gamma|^2+|\gamma-\alpha|^2$

$$=AB^2+BC^2+AC^2=3AC^2$$

$$=3\times(\sqrt{3})^2=9$$

が成り立つ。

問題3　$\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ (n は自然数) として，次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $z^n=1$ の解は 1，α，α^2，α^3，……，α^{n-1} と表されることを示せ。

(2)　$(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)\cdots\cdots(1-\alpha^{n-1})=n$ であることを証明せよ。

(1)はド・モアブルの定理による二項方程式の解法と，その解の図形的意味に触れる問題です。(2)は複素数平面ならではの証明で，感動的な図形的性質が内在しています。

【(1)の解法と $z^n=1$ の解 1，α，α^2，α^3，……，α^{n-1} の複素数平面上の位置】

二項方程式 $z^n=1$ の解を求める。

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと，

ド・モアブルの定理から，$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

また，$1=\cos 0+i\sin 0$ であるから，

$z^n=1$ より，$r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=\cos 0+i\sin 0$

この両辺の絶対値と偏角を比較して，

$r^n=1$，$r>0$ より，$r=1$

$n\theta=2\pi\times k$ (k は整数) より，$\theta=\dfrac{2\pi}{n}\times k$

よって，方程式 $z^n=1$ の解は，

$z=1\left\{\cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\times k\right)+i\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\times k\right)\right\}$ と表せ，

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから，

$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n-1$

したがって，求める解は

$k=0$ のとき，$z_0=\cos 0+i\sin 0=1$

$k=1$ のとき，$z_1=\cos\dfrac{2}{n}\pi+i\sin\dfrac{2}{n}\pi=\alpha$

$k=2$ のとき，$z_2=\cos\dfrac{4}{n}\pi+i\sin\dfrac{4}{n}\pi=\alpha^2$

$k=3$ のとき，$z_3=\cos\dfrac{6}{n}\pi+i\sin\dfrac{6}{n}\pi=\alpha^3$

……………………………………

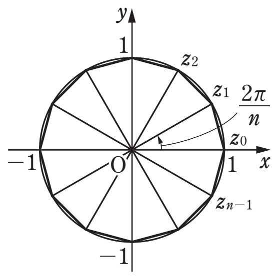
……………………………………

$k=n-1$ のとき，

$$z_{n-1}=\cos\frac{2(n-1)}{n}\pi+i\sin\frac{2(n-1)}{n}\pi$$

$$=\alpha^{n-1}$$

以上のように，方程式 $z^n=1$ の解 (1 の n 乗根) は 1，α，α^2，α^3，……，α^{n-1} で，これらを表す点 z_0，z_1，z_2，……，z_{n-1} は単位円周上にあり，点 $z_0(1)$ を 1 つの頂点とする正 n 角形の頂点であることが，それぞれの極形式からわかります。



【$(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)\cdots\cdots(1-\alpha^{n-1})=n$ の証明とこの等式の図形的意味】

(1)から，

$z^n-1=(z-1)(z-\alpha)(z-\alpha^2)(z-\alpha^3)\cdots\cdots(z-\alpha^{n-1})$

となる。

一方，

$z^n-1=(z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+z^{n-3}+\cdots\cdots+z+1)$

である。

よって，両方の式を比較して，

$(z-\alpha)(z-\alpha^2)\cdots\cdots(z-\alpha^{n-1})$

$=z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots\cdots+z+1$ ……②

が成り立つ。

②は z の恒等式であるから，$z=1$ を代入すると

$(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)\cdots\cdots(1-\alpha^{n-1})=n$

……③

となる。

さて，③の両辺の絶対値をとると，自然数 n に対して

$|1-\alpha|\cdot|1-\alpha^2|\cdot|1-\alpha^3|\cdots\cdots|1-\alpha^{n-1}|=n$

が成り立ちます。

また，$|1-\alpha^k|$ は正 n 角形の 2 つの頂点 $z_0(1)$ と $z_k(\alpha^k)$ を結ぶ線分の長さです。

つまり，③は，正 n 角形において，1 つの頂点と他の頂点とを結んでできる，$n-1$ 本の線分の長さの積は n になることを意味しています。

この図形上の性質の把握と，いとも簡単な証明への導きは複素数平面ならではです。私はとても感動しましたが，皆さんはいかがでしょうか。

授業
実践記録

SSH 校での「数学活用」の取り組み実践例

茨城県立日立一高等学校　沢畑雅彦

1．本校について

本校は平成19年度から「スーパーサイエンスハイスクール」（略称SSH）として文部科学省より指定を受け，今年度は第2期1年目（通算6年目）となる。SSHとは「将来の国際的な科学技術関係人材を育成するために，先進的な理数系教育を実施する学校として指定された高等学校等」のことで，本校の目標の中に「自然科学系部活動の充実」があり，そのような中で「数学部」が誕生した。

2．数学部おける「数学活用」の取り組み実践例

数学部はまず「数理科学研究同好会」としてスタートした。前任の先生は数式処理電卓を使って，RSA暗号やグラフの研究をしていた。その先生が異動となり，平成21年度より私が同好会を受け継いだ。同好会の活動内容はもちろん「数学の研究」である。これが本当につらい。前任者のものをそのまま踏襲しただけではおもしろくないだろうし，私が指導したのでは発展性も望めない。それならばテーマを変えていくしかないが，「高校生でも分かるテーマで，しかもおもしろいもの」そんなテーマはなかなか見つからないのである。生徒まかせにしておけば，平気で「フェルマー・ワイルズの定理」や「ガロア理論」などと言ってくるが，高校生が部活動程度で理解できるならば誰も苦労はしない。この時期は，生徒にテーマを探させながら，自分でもかなりの書物にあたった。数学をテーマにする場合，まず良い本を見つけることが大事だが，そのような本は見つからなかった。こうした中で本探しに多くの時間を割かざるを得なかった。やがて「マンガでわかる統計学」から「統計学」であれば何とかテーマは見つけられそうだと思うようになり「完全独習統計学」で統計学の基礎を学び，実際の統計は表計算ソフトを利用して学習を進めさせた。その結果モンテカルロ法を経て，「ビュフォンの針」を中学生でも理解できるように改良した「ビュフォンの10円玉？」という研究にたどりつくことができた。この研究によって我が数学部は平成24年8月富山県で行われた「第36回全国高等学校総合文化祭」の自然科学部門に茨城代表として参加することができた。

数学部は現在次なるテーマを見つけるために「数学活用」の教科書を活用させていただいている。この教科書は数学に関する様々な話題を取り上げながら，生徒が興味を持てるように構成されており，数学のレベルに関しても幅広く扱っているため，テーマ探しには適している。もちろん理解を深めるためには，専門的な書物をひもとく必要はあるが，導入としては最適である。部活動ばかりでなく，数学の授業における「課題学習」においても，活用することができると思われる。

3．「ビュフォンの10円玉」

最後に，先述の高総文祭で発表した「ビュフォンの10円玉」について書いておきたい。

平成23年度，「数理科学研究同好会」は部活への昇格が認められ，正式に「数学部」が誕生した。これを機に数学部の目標を「数学の楽しさを伝えよう」とし，テーマを「ビュフォンの針」とし研究を進めた。「ビュフォンの針」とは，何本かの平行線を引き，そこに針を落として確率を求める問題で，それより円周率を計算する。平行線と針の長さによるが，簡単に円周率が求まり，それもなかなか良い値が求まる。しかし現在知られている有名な「ビュフォンの針」の証明には，「コサインの逆関数」や「確率標本空間」の理解が必要であり，このままでは「数学の楽しさが伝」わらないということで，もっと分かりやすくできないかと考えた。

これまでモンテカルロ法の一つとして，正方形に内接する円を描き，その中に点を無数にうって円に入る確率から円周率を求める方法は知られていた（図1）。生徒はこの考え方に注目した。これまでの「円の中に点を打つ」という方法では，点が小さければ小さいほど正確な値が求まるのだが，小さくなるほど観測が難しくなる。そこで生徒たちは「点の上に円を投げる」というまさに「逆転の発想」に至った。円盤の直径幅の格子を描いた紙の上に，円盤を投げ，その円盤が格子点に触れた確率を4倍すると円周率になるという結果を得た。

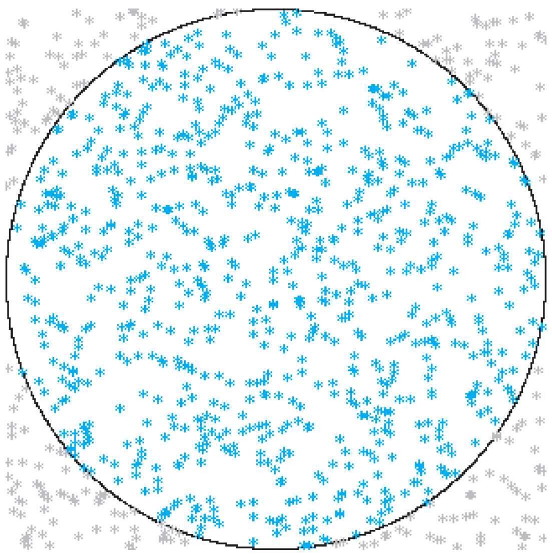


図1

次に生徒たちは分かりやすい証明を考えた。紆余曲折もあったが，最終的にたどり着いたのが（図2）である。

10円玉の半径を R とすると，10円玉の中心が（図2）の青い部分に落ちれば格子点に触れ，灰色の部分に落ちれば格子点には触れない。色の付いた正方形の面積が $4R^2$，青い部分の面積が πR^2 なので，10円玉が格子点に触れる確率は $\frac{\pi}{4}$ となる。そこから円周率 π を求めるといったものである。

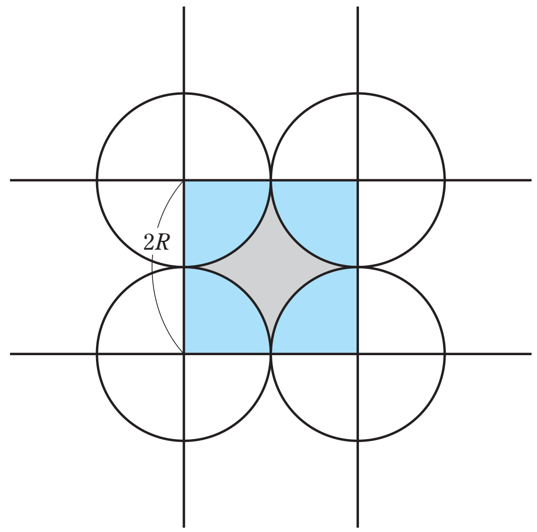


図2

理論と証明が整ったので，次は実験だった。まずは円盤を何にすべきか考えた。そこで最も手に入りやすい円盤として10円玉を選択した。生徒たちが注目したのは「世界中同じ条件で実験ができること」である。追実験を行う場合，世界中でできなければ意味がない。丸いコインであれば世界中で簡単に手にはいるはず。そして生徒たちは統計的な観点から2000回を目標に10円玉を延々と投げ続けた。それをグラフにしたものが（図3）である。一時的にはかなり3.14に近づいたが，結果として3.05となった。

その後，現在日本国内で流通するすべての硬貨で実験をした結果，5円玉と50円玉の「穴の空いた硬貨」が3.14により近いという実験結果を得た。この理由に関しては現在研究中である。

（参考文献）
「マンガでわかる統計学」（高橋信他著，オーム社刊），「完全独習統計学」（小島寛之著，ダイヤモンド社刊），「数学通になる本」（中宮寺薫著，オーエス出版社刊）
http://hp.vector.co.jp/authors/VA014765/pi/montecalro.html

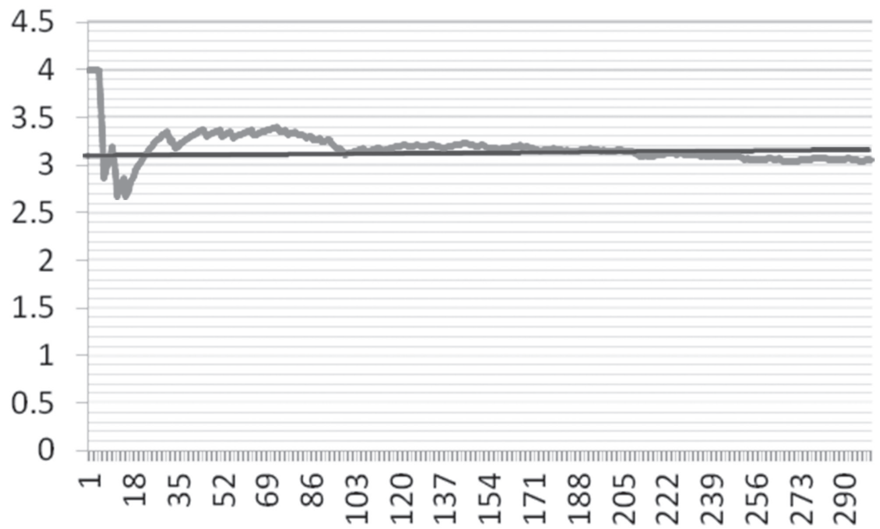
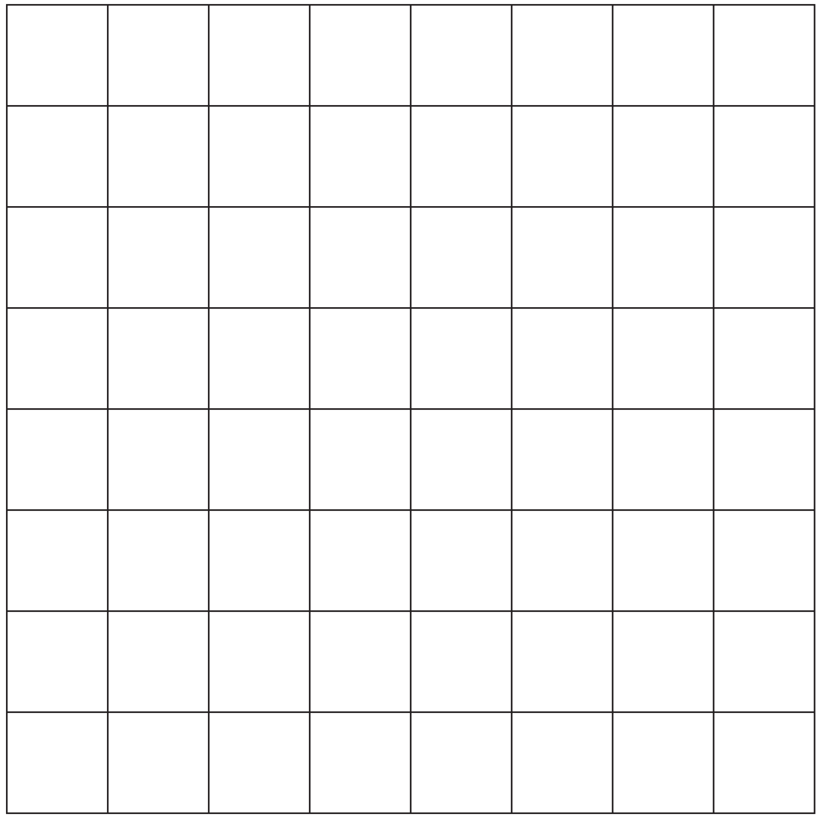


図3

沢畑 雅彦 さわはた まさひこ
茨城県日立市生まれ。茨城大学大学院理学研究科数学専攻修了。
母校である日立一高に勤務して7年目。
4月からマレーシア政府派遣留学生予備教育派遣教員としてマラヤ大学に勤務予定。



実際に求めてみよう！

・縦線と横線の交差しているところが**格子点！**

・$\dfrac{n(A)}{n(U)}=P(A)$ を使って，10円玉が格子点に掛かる確率を求めよう。

・$n(A)$ は格子点に掛かった10円玉の数。

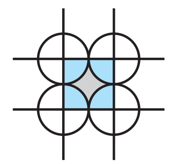
・$n(U)$ は投げた10円玉の数。

・10回，20回，100回… と数をこなせばこなすほど，確率は $\dfrac{\pi}{4}$ に近づきます。

ちなみに $\dfrac{\pi}{4}=3.1415\cdots\div4=0.785398\cdots$

・求めた確率に 4 を掛けるのを忘れずに！

・格子点に掛かるとき，10円玉の中心は右の図の青い部分にあるはず！



・灰色の部分に10円玉の中心があるとき，格子点には掛かっていないはずだ！

・求めた確率に **4 を掛ければ**，π の近似値が求まるはず！

モンテカルロ法のルーツである**ビュフォンの針**をインターネットでぜひ調べてみよう！

授業実践記録

基本公式の活用例としての掛算の新しい方法（2桁九九の話）

学校法人富田学園　岐阜東高等学校　亀井喜久男

1 年の式の計算のところで扱う公式の応用として掛算筆算と暗算の新方式を提案する。位の明示と，九九の温存を考えた方法である。さらに先頭から計算する方式である。3 桁まで× 3 桁の筆算も可能となる。まず公式を確認しよう。

$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

23×45 で実際を見せながら説明しよう。

```
   23.
  ×45.
  8
   10
   12
    15
 1035.
```

この方式は上記のように小数点の明示をする。先頭の数から，上の数を軸に計算処理を行う。位がどこになるかが重要である。

最初の計算は 2×4 で 8 である。上図のように小数点位置より左へ 2 だけ進んだ位置の百の位に書き込むことになる。さて次は 2×5 であるがこの積の位は十×一であるから十である。上図のように十の位の位置に 2 桁の 10 を記入することになる。次に 3×4 である。この積は 12, 位は十。よって上図のように 12 を記入する。最後は 3×5 であるが，積は 15，位は一である。基準の小数点位置から移動しない。そこを基準に 2 桁の数を記入する。

この方式に長所は多い。覚えておいて繰り上がりを処理しながらすすむ現行の筆算は頭脳の負担が大きい。それに対してこの方式は覚える必要は全くない。九九のミスは見直しの時に容易に発見できる。さらに上の位からの計算であるので概数の把握ができることも相当重要な長所になる。

3 桁×3 桁，たとえば 234×567 の計算も同じようにできる。

```
     234.
    ×567.
   10
    12
     14
    15
     18
      21
    20
     24
      28
  132678.
```

一万の位になる積は 1 つ，千の位になる積は 2 つ，百の位になる積は 3 つ，十の位になる積は 2 つ，一の位になる積は 1 つである。3 桁同士の時は必ずこうなるので，次のような計算枠をあらかじめ用意しておいて，そこに数値を書き込む方式も考えられる。図のようになる。それぞれを位に沿って書き込んで行く。書き込みは図の左にある〇付き番号順になる。位を想起するためにお金の種類を利用する。

234×567

一万円	①	1	0				
千円	②		1	2			
千円	④		1	5			
百円	③			1	4		
百円	⑤			1	8		
百円	⑦			2	0		
十円	⑥				2	1	
十円	⑧				2	4	
一円	⑨					2	8
		1	3	2	6	7	8

お金の種類ごとに個数（札の枚数）を計算して合算した和の数を位に注意して下図の様に下から記入する方法も考えた。最後に足し算を実行して積の値をうる方式を計算神社階段方式という。

一万円枚数	1	0				
千円札枚数		2	7			
百円玉個数			5	2		
十円玉個数				4	5	
一円玉個数					2	8
結果は	1	3	2	6	7	8

先頭の数から計算する方法の利点が活躍するのは小数同士の計算においてである。

			2	.	3	4		
			×5	.	6	7		
1.0 の位	①	1	0	.				
0.1 の位	②		1	.	2			
0.1 の位	④		1	.	5			
0.01 の位	③			.	1	4		
0.01 の位	⑤			.	1	8		
0.01 の位	⑦			.	2	0		
0.001 の位	⑥			.		2	1	
0.001 の位	⑧			.		2	4	
0.0001 の位	⑨			.			2	8
		1	3	.	2	6	7	8

計算の最初から概数の掌握ができる。

1.23×4.56 の筆算も見てみよう。

1.0 の位	①	4	.				
0.1 の位	②			5			
0.1 の位	④			8			
0.01 の位	③				6		
0.01 の位	⑤			1	0		
0.01 の位	⑦			1	2		
0.001 の位	⑥				1	2	
0.001 の位	⑧				1	5	
0.0001 の位	⑨					1	8
		5	.	6	0	8	8

理科表記の数同士の積においてもこの方式の方が有用である。とりわけ上から 3 桁の概数同士の時を考えよう。その時計算結果とすべきは四捨五入した上の，上から 3 桁の数値であるからである。また概数の把握も先頭数の積から計算することで見通しが立つのである。円周率などの小数をかける時もこの算法なら困らない。

もう一つの重要な発展　（2 桁九九を目指して）

現在日本でインド式掛算が流行している。インドの学生は 2 桁の九九ができるそうである。ITで活躍するインド人の科学や数学の力の強さはそれも関係しているという。ならばインドに対抗しよう。使うのはやはり基本の公式である。

公式 $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$ は，たすき掛けの因数分解の前段階で伝えられる展開の公式である。2 桁九九を納得すればこの公式が実は宝物と考えてくれる生徒が出てくると思う。

$a=2$，$b=3$，$c=4$，$d=5$ を考える。いま $x=10$ としたとき左辺は　23×45 である。

右辺は 100 の 8 倍，10 の 22 倍，1 の 15 倍の和になる。下の枠を利用した筆算だと次のようになる。これも計算神社階段方式と呼んでいる。

百円玉個数		8		
十円玉個数		2	2	
一円玉個数			1	5
	1	0	3	5

右辺を暗算で処理することを考える。

ac は百円玉の個数，$ad+bc$ は十円玉の個数，bd は一円玉の個数という考え方をする。

一番厄介そうなのは真ん中の項である。$ad+bc$ であるが外側積＋内側積で求める。実際の暗算においてはこの値を先に求めておくことになる。

これで実生活での金額計算の経験で培った力を数値計算に役立てるようにできる。

いろいろな例でこの掛算をやってみよう。

23×45　のとき，まず十円の個数先行

十円玉は 2×5＋3×4 で　22 個で　金額 220 円，

百円玉は 2×4 で8個，金額 800 円

10 円金額 220 円に 100 円金額 800 円を合算する。この中間集計は 1020 円である。最後に　3×5 で 15 円を加算する。最終結論は　1035 円となる。

さらにいくつかの計算をやってみよう。

29×29 を求めよう。まず 10 円玉の個数については外側の積で 18 個と内側の積で 18 個，合わせて 36 個となり，10 円での金額は 360 円である。

100 円玉の個数は 2×2 の 4 個で 400 円，よって中間集計は 760 円である。加算すべき 1 円玉の個数は 9×9 で 81 個である。この結果の 81 円を算入して総合計　841 円となる。

16×17 でやってみよう。10 円玉は 13 個
100 円玉は 1 個，合わせて中間集計 230 円，
1 円玉は 6×7 で 42 円。算入加算して 272 円。

24×48　でやってみよう。10 円玉個数は 16＋16 で 32 個　金額は 320 円，100 円玉は 2×4 で 8 個，金額は 800 円　中間集計は 1120 円，ここへ 1 円個数 32 個で金額 32 円。これを加算集計して 1152 円となる。

先の十円玉の個数処理をしたほうが間違いにくいとのインスピレーションは日本の由緒ある知恵の神様思兼神社参拝の時得たことは伝えておこう。

ただし私は暗算にはこだわらない。九九温存の新型筆算や，一部暗算の神社階段方式のように記録を残すこともむしろ積極的にとらえている。

下の枠を空に大きく書いて心で記入しながらの暗算も推奨する。紙にメモしながらでも意義はある。大事なことは位の概念を理解することである。

2 桁×2 桁の暗算方式名称は教科書公式法である。活用されたし。

最後に問題 16×17。99×99。

百円玉個数		1		
十円玉個数		1	3	
一円玉個数			4	2
		2	7	2

百円玉個数	8	1		
十円玉個数	1	6	2	
一円玉個数			8	1
	9	8	0	1

追記　九々温存筆算には，一の位から書き始める流儀は当然あっても良い。二桁整数×二桁整数
三桁整数×三桁整数　の時の枠は添えておくので活用されたし。

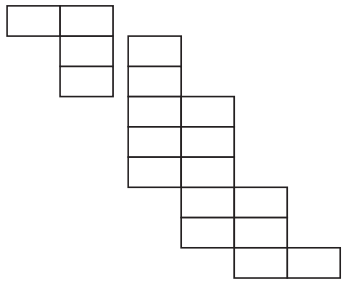
神社階段方式の枠

百円玉個数				
十円玉個数				
一円玉個数				

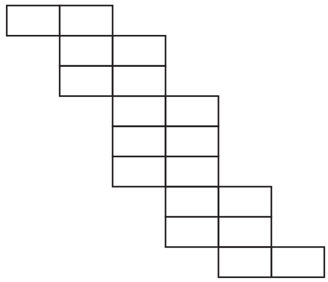
または

一円玉個数				
十円玉個数				
百円玉個数				

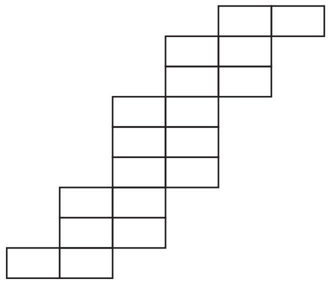
上からの筆算の枠（小数×小数）



上からの筆算の枠（整数×整数）



下からの筆算の枠（整数×整数）



亀井 喜久男　カメイ キクオ

岐阜大学教育学部数学科出身，公立学校を経て私立岐阜東高校に勤務，現在に至る。岐阜県高数研数学教育研究委員も務めた。教材開発を重ね，数学史に題材を求めたエジプト紐，古墳時代の縄の数学を発表。主要論文業績
「高次元立方体の表現，数理科学」
「微積分学習への提言，数理科学」
「平方・平方根図式，数理科学」など。「ハンドボールコート作成の新方式20：21：29の活用」で注目されている。1955年，多治見北高校出身。

理数教育の未来へ
啓林館
http://www.shinko-keirin.co.jp/

〒543-0052　大阪市天王寺区大道4-3-25　TEL.06-6779-1531　FAX.06-6779-5011
〒113-0023　東京都文京区向丘2-3-10　TEL.03-3814-2151　FAX.03-3814-2159
〒003-0005　札幌市白石区東札幌5条2-6-1　TEL.011-842-8595　FAX.011-842-8594
〒461-0004　名古屋市東区葵1-4-34 双栄ビル2F　TEL.052-935-2585　FAX.052-936-4541
〒732-0052　広島市東区光町1-7-11 広島CDビル5F　TEL.082-261-7246　FAX.082-261-5400
〒810-0022　福岡市中央区薬院1-5-6 ハイヒルズビル5F　TEL.092-725-6677　FAX.092-725-6680

20130401